



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

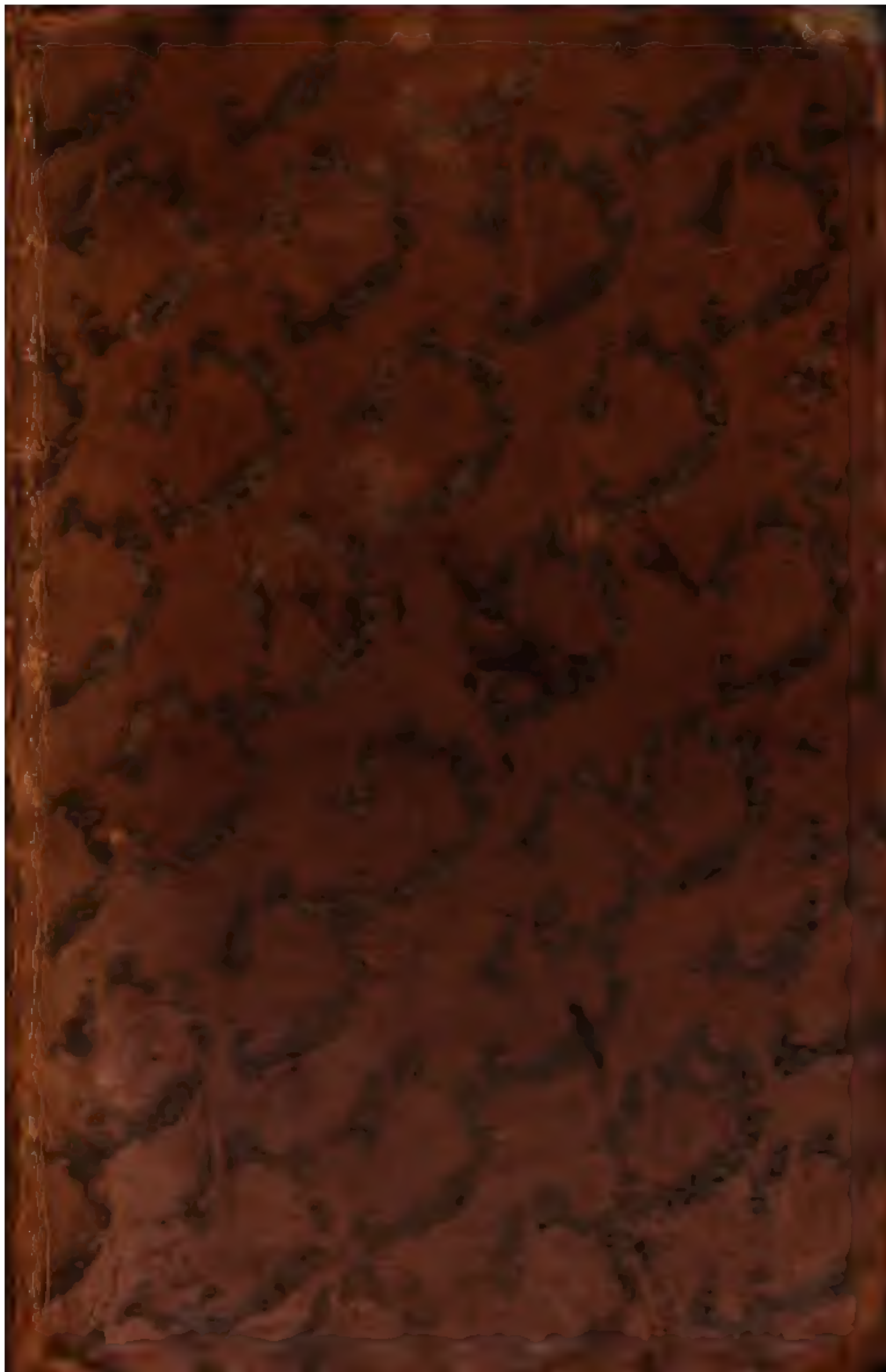
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

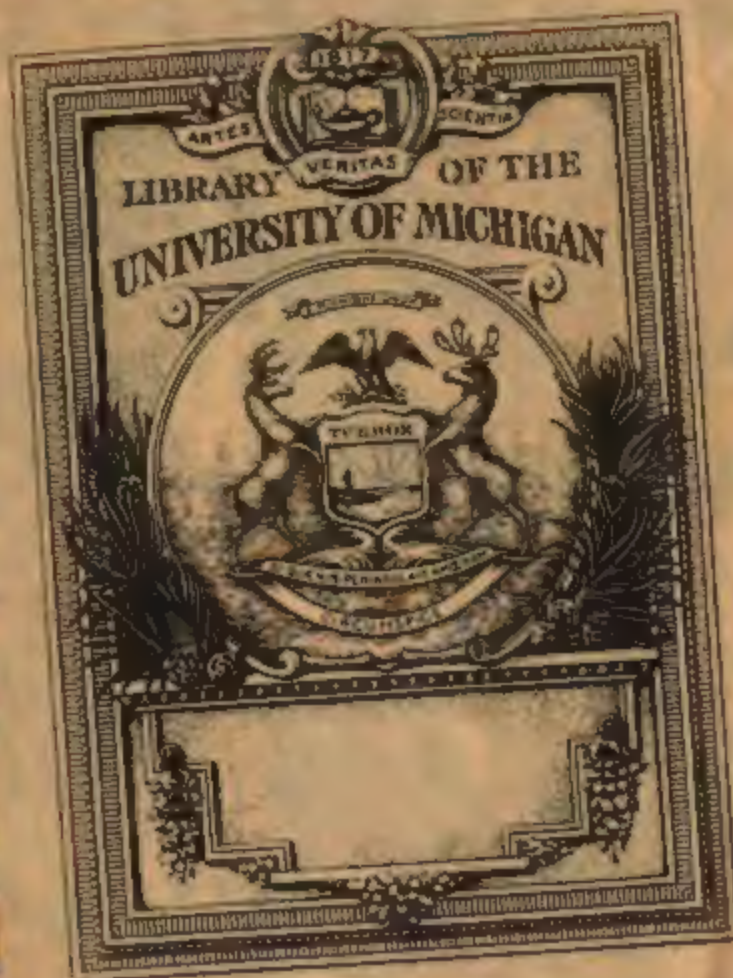
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>











95  
R.289



Q

164

099

1750







# RECREATIONS MATHEMATIQUES

ET

## PHYSIQUES, QUI CONTIENNENT

Plusieurs problèmes d'arithmétique, de géométrie, de musique, d'optique, de gnomonique, de cosmographie, de mécanique, de pyrotechnie, & de physique. Avec un traité des horloges élémentaires.

*Par feu M. <sup>pequ</sup>MOZANAM, de l'Académie Royale des Sciences, & Professeur en Mathématique.*

NOUVELLE EDITION,

*Revue, corrigée & augmentée.*

TOME PREMIER.



A PARIS,  
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, rue  
Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

---

M. D C C. L.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



1212



## P R É F A C E.

**J**E ne m'excuserai pas de ce qu'après avoir donné au Public des traités sérieux, qui demandent toute l'application des lecteurs, il semble que je veuille dissiper leur application, & les en détourner par les jeux d'esprit que je leur présente dans ces derniers volumes. La mémoire des grands hommes qui ont fait la même chose que j'entreprends, est si glorieuse, que leur exemple vaut toutes les justifications que je pourrois apporter. Le docte Bachet, fleur de Méziriac, célèbre par ses excellens ouvrages, commença à se faire connoître dans la république des lettres par un recueil qu'il intitula, *Problèmes plaisans, qui se font par les nombres*. Il voulut par ce livre s'assurer de son talent, & du jugement du public, avant que de mettre au jour ses commentaires sur l'arithmétique de Diophante, & les autres livres qui lui ont acquis une gloire immortelle. Plusieurs autres auteurs de ce siècle, comme le fameux Pere Kircher, & les Perts Schot & Bertin n'ont pas moins fait de

bruit dans le monde savant, par les problèmes divertissans qu'ils ont mis dans leurs ouvrages, que par leurs raisonnemens, & par leurs plus sérieuses observations.

Quoique ces grands exemples puissent suffire pour autoriser mon dessein, néanmoins afin que ces hommes illustres, que j'ai pris pour garans, ne soient pas eux-mêmes exposés à la censure de ceux qui voudroient les accuser de nouveauté, je produirai des exemples bien plus anciens, qui font voir que de tout tems les plus grands hommes ont tenu la même conduite, s'étant bien apperçus que le même fond de raison qui fait trouver du plaisir dans l'admiration, en doit aussi faire trouver dans les choses qui font le sujet de l'admiration.

Le commerce d'énigmes que les rois de Syrie entretenoient, & qui a fait durer si long-tems après eux le stile parabolique, n'étoit autre chose que des jeux d'esprit, & des entretiens également propres à exciter le plaisir, & à donner de l'élévation à l'esprit. Les grands de ce tems-là étoient faits comme ceux d'aujourd'hui, la peine les rebutoit; c'étoit un coup de l'adresse & de l'habileté extraordinaire de ceux qui les vouloient

instruire, que de les attacher à l'étude & à la réflexion, par le plaisir & par la curiosité. Je ne doute pas que l'éducation que Nathan donna à Salomon par cet exercice, n'ait beaucoup contribué à cette élévation d'ame, & à cette sagesse merveilleuse qui fait le caractère & la gloire de ce prince.

C'étoit aussi par maniere de divertissement que les Chaldéens & les Egyptiens qui ont inventé l'astronomie, marquoient par avance à leurs amis les jours & les circonstances des éclipses, & qu'ils leur traçoient des figures qui partageoient la durée des jours, qui montroient les routes des étoiles, & qui représentoient toutes les variétés des mouvemens des cieux ; persuadés, aussi bien que les Grecs, que les premiers plaisirs de l'esprit sont ceux que l'on emprunte des mathématiques, dans lesquels ils faisoient élever leurs enfans. Ils croyoient que si la raison des enfans étoit sans action, elle n'étoit pas néanmoins sans force, & qu'il n'y avoit qu'à lui donner du mouvement pour la perfectionner : ce qui se pouvoit faire, en donnant aux enfans de la curiosité, qui fait en eux ce qu'une longue suite de nécessités de la vie fait dans les personnes d'un âge plus avancé. C'est là le secret de



Il est certain que le jeu des échets a été inventé pour instruire, aussi-bien que pour divertir ; en représentant les attaques & les défenses des pieces différentes, leur marche, & leurs aventures, on a voulu faire des leçons de morale, & montrer par le désastre du roi des échets, qu'un prince tombe inmanquablement au pouvoir de ses ennemis quand il s'est dépouillé de ses soldats, & qu'il ne peut négliger la perte d'un seul de ses sujets, sans s'exposer à celle de ses propres Etats.

On peut réduire tous les jeux qui ont été inventés, ou qu'on pourroit inventer, à trois classes différentes : la premiere est de ceux qui dépendent absolument des nombres & des figures, comme les échets, le jeu des dames, & quelques autres : la seconde de ceux qui dépendent du hasard, comme les dez, & les jeux semblables : la troisieme de ceux qui dépendent de la justesse des mouvemens, comme les jeux de l'arquebuse, de l'arc, de la paume, & du billard ; il y en a qui sont mêlés d'adresse & de hasard, comme le trictac, le hocca, les cartes, & la plupart des autres. Mais il est constant qu'il n'y en a point qu'on ne puisse tellement soumettre aux regles des mathématiciens, que l'on ne fût assuré de gagner, si l'on y pouvoit

V. l'E-  
fai d'a-  
nalyse  
sur les  
jeux de

*P R E F A C E.* jx

apporter toute l'habileté nécessaire. Les jeux d'adresse ont tant de rapport aux principes de la statique & de la mécanique, que ce n'est que faute d'en bien savoir les regles, ou de les bien mettre en usage, que l'on ne gagne pas dans ces jeux-là. Il n'y a point de jeux de hasard, où la victoire ne dépende de la rencontre d'un nombre, ou du poids, ou de l'étendue de la figure. Le joueur qui imprime le mouvement, pourroit déterminer la fin, s'il étoit parfaitement habile, & quoique cela ne paroisse pas possible, parce qu'on ne trouve personne d'une parfaite habileté, il est néanmoins vrai que l'on pourroit le faire, & qu'une méthode infail-  
libile de gagner aux échets, n'est pas absolument impossible ; personne ne l'a encore trouvée, & je ne crois pas qu'on la trouve jamais, parce qu'elle dépend d'un trop grand nombre de combinaisons. C'est assez qu'un point de perfection soit possible, pour engager les curieux au travail. L'orateur parfait, disoit Cicéron, n'a jamais été ; mais il est possible, son idée tel que ce grand maître l'a peint, sert de modele à ceux qui se mettent en devoir de se rendre habiles en éloquence. Il en est de même du poëte, du peintre, de l'architecte, du médecin, & de tous les

hazard,  
par M.  
de  
Mont-  
maur.

## **x P R E F A C E.**

autres. - Aussi quoiqu'il soit vrai que personne ne sçaura jamais la méthode inmanquable de tous les jeux, ni peut-être d'aucun, néanmoins il ne faut pas laisser de s'y rendre le plus habile que l'on peut, en tâchant d'approcher de l'idée qu'on se fait de cette méthode, qui est enfermée dans l'exactitude des regles & des principes des mathématiques.

C'est une chose bien extraordinaire, que de vouloir mettre les joueurs dans mon parti, & engager dans l'étude des récréations mathématiques les hommes d'état & les capitaines; mais puis-je empêcher tout le monde de profiter des leçons qui sont établies sur les principes les plus naturels, & sur les vérités attachées à l'essence des choses? Puis-je défendre des plaisirs qui sont engageans par leur utilité, & qui sont si communs, si faciles & si propres à tous ceux qui ont de la raison, qu'on ne peut les ôter aux hommes, sans les priver de ce qu'il y a de plus agréable dans la vie.

On croit depuis si long-tems qu'il y a eu quelque art secret entre les plus savans des Juifs, des Arabes, & des disciples de cette ancienne académie qui tenoit en Egypte, où Moïse fut élevé, & qui florissoit encore du tems de Salomon; que

*P R E F A C E.* xj

cela a excité la curiosité des meilleurs esprits, pour découvrir ce qui en est : mais le moyen d'apprendre un art sans maître & sans livre ? Les savans de ces tems-là n'écrivoient point, ou s'ils écrivoient, c'étoient des énigmes & des discours si éloignés de ce qu'on attend, qu'on peut dire que leur silence est plus instructif que leurs discours.

Le Pere Schot dit qu'il y a trois sortes de cabales ; c'est le nom qu'il donne à cet art secret des Orientaux, celle des Rabbins, celle de Raimond Lulle, & celle des Algebristes. Il ne peut dire ce que c'est que la premiere : les deux dernieres sont des jeux de nombres & de figures. Je ne doute pas que la premiere ne soit la même chose. Josephe, qui étoit prêtre, écrit hardiment que par le droit de sa naissance, il avoit été instruit dans tous les mysteres des Juifs, & qu'on lui avoit enseigné tous les secrets de leur art. Il se flatta par un esprit de cour, qui l'emporta par dessus sa conscience, d'avoir prédit par la force de cet art, l'élevation de Titus, qui fut empereur. Il cacha son jeu, comme un habile homme doit faire. Il soutient le personnage de merveilleux ; & quand il parle de l'aventure où il faillit à perdre la vie par le désespoir de ses soldats, résolu



V. page  
248 du  
tome I.

de s'égorger les uns les autres, plutôt que de se rendre aux Romains, il attribue sa conservation, ou au hazard, ou à un miracle. Cependant il est à croire que Jofephe ne fit ce miracle que par la science des nombres & des figures; il fit ranger ces défcspérés de maniere que le fort tomba fur ceux que le capitaine voulut bien laiffer périr. Il fava fa vie parce qu'il étoit mathématicien, & non pas parce qu'il étoit lévite. Ce qui fait voir que les connoiffances les plus abstraites fe peuvent réduire en pratique, & qu'on peut mettre à quelque ufage ce qui en paroît le plus éloigné.

Je m'étonne de ce que du tems des empereurs Dioclétien & Constantin, les loix défendirent les mathématiques, comme des connoiffances dangereufes, en condamnant les mathématiciens & les forciens aux mêmes peines, comme également criminels & pernicioeux à la fociété civile, felon ce qui paroît par le titre 17 du livre 9 du code de Juftinien. Je crois que c'eft par l'ignorance qui regnoit en ce tems-là, & par le grand nombre des charlatans qui fe fervoient des mathématiques pour imposer & pour tromper la crédulité des ignorans. Mais il faut blâmer la ftupidité de ceux qui fe laiffent

tromper , & il ne faut pas autoriser la faiblesse de ceux qui ne veulent pas cultiver assez leur esprit pour être en état de n'être jamais surpris. On a vu des états qui ont permis les souplesses , les petits larcins faits avec adresse , pour tenir les particuliers sur leurs gardes , & pour les accoutumer à prendre toujours de bonnes précautions.

L'ignorance tient le monde dans une admiration perpétuelle & dans la méfiance , ce qui produit toujours une envie invincible de blâmer & de persécuter ceux qui savent quelque chose de plus que le commun , qui n'étant pas accoutumé à s'élever au-dessus des choses sensibles , & ne pouvant s'imaginer que la nature emploie des agens qui ne soient pas visibles & palpables , attribue souvent aux sorciers & aux démons tous les effets dont il ne connoît pas la cause. Je veux par mes récréations mathématiques , enseigner tout le monde à faire ces sorcelleries , qui faisoient peur aux gens du conseil de Justinien ; & par-là je ferai plus qu'un savant homme\* , qui s'est contenté du simple raisonnement , pour défendre saint Thomas d'Aquin , Albert le Grand , Salomon , & plusieurs autres grands hommes , qui n'ont été accusés

\* Gabriel Naudé.

d'être magiciens , que parce qu'ils sça-  
voient faire quelque chose de plus que  
les autres.

Un seul livre n'étant pas capable de  
contenir toutes les propositions qu'on peut  
faire sur cette matiere , on a divisé cet  
ouvrage en quatre volumes , où l'on donne  
les problêmes les plus faciles , les plus  
utiles & les plus agréables. Le premier  
contient les problêmes d'arithmétique ,  
de géométrie , de musique & d'optique.  
Le second volume comprend les pro-  
blêmes de gnomonique , de cosmographie  
& de mécanique. Le troisieme volume  
renferme les problêmes de pyrotechnie &  
de physique , avec un traité des horloges  
élémentaires. Le quatrieme & dernier  
volume traite des phosphores naturels &  
artificiels & des lampes sépulchrales des  
anciens. On y a joint un recueil des tours  
de gibeciere & de gobelets les plus connus  
& les plus récréatifs.

---

## PRIVILEGE DU ROI.

**L**OÛIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé C. A. JOMBERT, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il désireroit faire réimprimer & donner au Public des livres qui ont pour titre : *les Oeuvres de Mathématiques, de feu M. Ozanam, de l'Académie des sciences ; Secrets des Arts & Métiers ; le Teinturier parfait ; l'Art de la Verrerie ; l'Art de tourner, du Pere Plumier* : s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire réimprimer lesdits livres en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre, débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes : faisons défenses à toutes autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire réimprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits livres, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentations, corrections & autres sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpression desdits livres sera faite dans notre royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-



sel des présentes ; que l'Impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie , & notamment a celui du 10 avril 1725 ; & qu'avant de les exposer en vente , les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à la réimpression desdits livres , seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée , es mains de notre très - cher & féal Chevalier le sieur d'Aguesseau , Chancelier de France , Commandeur de nos Ordres , & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre bibliothèque publique , un dans celle de notre Château du Louvre , & un dans celle de notre très - cher & féal Chevalier d'Aguesseau , Chancelier de France , Commandeur de nos Ordres , le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant , ou ses ayans causes , pleinement & paisiblement , sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes , qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits livres , soit tenue pour dûement signifiée , & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires foi soit ajoutée comme à l'original : commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis , & nécessaires , sans demander autre permission , & nonobstant clameur de Haro , Charte Normande , & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le 22<sup>e</sup> jour du mois de juillet l'An de Grace mil sept cent quarante-six , & de notre Regne le trente-unieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

*Registré sur le Registre 11 de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris , N<sup>o</sup>. 615 , fol. 543 , conformément aux anciens Réglemens , confirmés par celui du 28 Février 1733. A Paris le 5 Mai 1746.*

VINCENT, Syndic.



# RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES.

---

## *Problèmes d'arithmétique.*

**C**OMME je ne prétends pas proposer des problèmes difficiles, je ne prétends pas aussi en donner les démonstrations, pour ne pas embarrasser le lecteur, que je veux divertir. Je me contenterai de donner la solution de ces problèmes par des règles qui ne sont sujettes à aucune erreur.

## P R O B L È M E I.

*Des religieuses sont retirées en huit cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'abbesse qu'on suppose aveugle, fait sa visite : elle compte le nombre des religieuses qui sont dans les trois*

*cellules d'un rang, elle trouve que le nombre des religieuses d'un rang est égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux cellules des coins & celle du milieu. Cette abbessse fait une visite, & compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la premiere visite, quoiqu'il y soit entré quatre hommes. Enfin dans la troisieme visite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes soient sortis, & qu'ils ayent emmené chacun une religieuse.*

**J**E suppose qu'il y ait d'abord trois religieuses dans chaque cellule. L'abbessse en comptera neuf à chaque rang dans la premiere visite qu'elle fera. Si ensuite une religieuse sort de chaque cellule du coin pour entrer avec un homme dans la cellule du milieu, qui est à sa gauche, l'abbessse faisant sa seconde visite, trouvera encore neuf personnes dans chaque rang du dortoir. Enfin si chaque homme \* emmene sa religieuse, & que deux religieuses sortant de chaque cellule du milieu, entrent dans l'une des cellules des coins qui est à leur droite, l'abbessse comptera dans une troisieme visite neuf personnes à chaque rang du dortoir.

### R E M A R Q U E.

On peut aisément exécuter ce problème avec des jetons, & le pousser plus loin en faisant faire une quatrieme visite à l'abbessse, qui trouvera toujours neuf personnes à chaque rang du dortoir, quoique chaque religieuse, qui étoit sortie avec un homme,

\* Qui étoit enfermé dans la cellule du milieu.

## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

sortirée avec deux hommes. Avant cette quatrième visite, il faut faire passer de chaque cellule de coin trois religieuses dans la cellule du milieu, où elles entreront avec leur compagne, qui y amenera deux hommes.

Ces figures feront connoître sensiblement ce qu'il y a à faire pour la solution de ce problème.

3	3	3
3		3
3	3	3

2	5	2
5		5
2	5	2

4	1	4
1		1
4	1	4

1	7	1
7		7
1	7	1

## PROBLÈME II.

*On a mené sur le bord d'une rivière un loup, une chèvre & un chou. On propose à un batelier de les passer seul à seul, de manière qu'en son absence le loup ne fasse aucun mal à la chèvre, & que la chèvre ne touche point au chou.*

**L**E batelier commencera par passer la chèvre, puis il retournera prendre le loup; quand il aura passé le loup, il ramènera la chèvre qu'il



## RECREAT. MATH. ET PHYS.

laissera à bord pour passer le chou du côté du loup. Enfin il retournera prendre la chèvre, & la passera. Par ce moyen le loup ne se trouvera avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou, qu'en la présence du batelier.

## P R O B L E M E III.

*Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obscure au passage d'une rivière. Ils rencontrent un bateau sans batelier. Ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront deux à deux, de sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.*

**D**Eux femmes passeront d'abord, puis l'une ayant ramené le bateau, repassera avec la troisième femme. Ensuite l'une des trois femmes ramènera le bateau, & se mettant à terre, laissera passer les deux hommes donc les deux femmes sont de l'autre côté. Alors un des hommes ramènera le bateau avec sa femme, & la mettant à terre, il prendra le troisième homme, & repassera avec lui. Enfin la femme qui se trouve passée entrera dans le bateau, & ira chercher en deux fois les deux autres femmes.

On met ici quatre vers latins qui contiennent la solution de ce problème.

*It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;*

*Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.*

*Par vadit & redeunt bini; mulierque sororem*

*Advehit: ad propriam sine maritus abit.*

## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

### R E M A R Q U E.

On propose encore ce problème sous le titre de trois maîtres & de trois valets. Les maîtres s'accordent bien ensemble & les valets aussi. Mais chaque maître ne peut souffrir les valets des deux autres maîtres ; de manière que s'il se trouvoit avec l'un des deux valets en l'absence de son maître , il ne manqueroit pas de le bien battre.

### P R O B L E M E I V.

*Faire l'addition d'une manière particulière, & qui soit inconnue à tout autre.*

Cette addition est pratiquée par les marchands qui ne se servent point de chiffres ordinaires, pour marquer le prix de leurs marchandises. Ils se font une arithmétique particulière avec des lettres, ou tels autres caractères qu'il leur plaît. Ils prennent, par exemple, ces dix lettres de notre alphabet, b, o, n, e, f, a, c, i, u, s, auxquelles ils donnent la valeur des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Ainsi quand ils veulent marquer 11, ils désignent ce nombre par bb. Quand ils veulent exprimer 59, ils le font par fu. Ils emploient ces lettres de la même manière qu'on a coutume d'employer les chiffres ordinaires 1, 2, 3, &c. en sorte que ces caractères b, o, n, &c. étant à la première place à droite, ne marquent que des unités ; mais quand ils se trouvent à la deuxième place, ils signifient des dizaines ; à la troisième ils expriment des centaines, & ainsi des autres ; de même que dans l'arithmétique, où nous nous servons de caractères arabes,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

b, o, n, e, f, a, c, i, u, s.

## E X E M P L E S.

11. 12. 13. 14. 24. 25. 36. 48. 59. 60. 112. &c.  
bb. bo. bn. be. oe. of. na. ei. fu. af. bbo. &c.

## P R O B L E M E V.

*Soustraire par une seule opération plusieurs sommes  
de plusieurs sommes données.*

**P**our ôter toutes les sommes d'en bas, qui sont  
au-dessous de la ligne en B, de toutes les som-  
mes d'en haut, qui sont au-dessous de la ligne en A,  
on commencera à ajouter les nombres de la pre-  
mière colonne d'en bas à la droite,

56243

84564 A

1254

26848

—

2942

3654 B

2308

—

162003

en disant, 8 & 4 font 12, & 2  
font 14, que l'on ôtera de la plus  
proche dizaine, c'est-à-dire, de  
deux dizaines, ou de 20 : le reste  
sera ajouté à la colonne correspon-  
dante de dessus, en disant 6 &  
8 font 14, & 2 font 16, & 4  
font 20, & 3 font 23 ; il faudra  
écrire 3 au dessous ; & parce qu'il  
y a ici deux dizaines comme aupa-  
ravant, on ne retiendra rien. Ajou-  
tez de la même façon les nombres  
de la colonne suivante d'en bas, en disant 0 &  
5 font 5, & 4 font 9, qu'on ôtera de la plus  
proche dizaine, ou de 10 : le reste 1 sera ajouté  
à la colonne correspondante d'en haut, en disant  
1 & 4 font 5, & 5 font 10, & 6 font 16,  
& 4 font 20, il faudra écrire 0 au-dessous, &  
parce qu'il y a ici deux dizaines, & que dans la  
colonne d'en bas il n'y en a eu qu'une, on re-

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 7

tiendra la différence 1, qu'on ôtera de la colonne suivante d'en bas, à cause qu'on a trouvé plus de dizaines en A qu'en B; car il la faudroit ajouter si l'on avoit trouvé moins de dizaines en A qu'en B. Quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en bas, pour n'y avoir point de figures significatives, comme il arrive ici à la cinquieme colonne, on l'ajoutera à la colonne d'en haut, & l'on écrira toute la somme au-dessous de la ligne, de sorte que dans cet exemple l'on aura 162003, pour le reste de la soustraction.

## P R O B L E M E V. I.

### *Multiplication abrégée.*

**P**our multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la multiplication de deux autres, comme par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux 4, 6, ou de ces deux autres 3, 8; on multipliera le nombre proposé 128 par 4, & le produit 512 par 6: ou bien on multipliera le nombre proposé 128 par 3, & le produit 384 par 8, & l'on aura 3072 pour le produit de la multiplication qu'il falloit faire.

D'où il suit que pour multiplier un nombre proposé par un nombre quarré, il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre quarré, puis multiplier le produit par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 25, dont la racine quarrée, ou le côté, est 5, on multipliera 128 par 5, & le produit 640 encore par 5, & l'on aura 3200 pour le produit de la multiplication. Ainsi



## 8. RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

pour sçavoir combien il y a de pieds quarrés en 32 toises quarrées, on multipliera 32 par 6, & le produit 192 encore par 6, & l'en aura 1152 pour le nombre des pieds quarrés qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la multiplication de trois autres, comme par 108, qui est produit par la multiplication de ces trois 2, 6, 9, ou de ces trois 3, 6, 6; on multipliera le nombre proposé 128 par 2, le produit 256 par 6, & le second produit 1536 par 9. Ou bien l'on multipliera le nombre proposé 128 par 3, le produit 384 par 6, & le second produit 2304 encore par 6, & l'on aura 13824 pour le produit qu'il falloit trouver.

D'où il suit que, pour multiplier le nombre proposé par un nombre cubique, il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre cubique, le produit par le même côté, & le second produit encore par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 125, dont la racine cubique ou le côté est 5, on multipliera d'abord 128 par 5, puis le produit 640 encore par 5, enfin le second produit 3200 par 5, & l'on aura 16000 pour le produit de 128 par 125. Ainsi pour sçavoir combien il y a de pieds cubes en 32 toises cubes, on multipliera 32 par 6, ensuite le produit 192 aussi par 6, enfin le second produit 1152 encore par 6, & l'on aura 6912 pour le nombre des pieds cubes qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque par telle puissance qu'on voudra de 5, on ajoutera au nombre proposé vers la droite autant de zero que l'exposant de la puissance comprendra d'unités, comme un zero pour 5, deux zero pour son quarré 25,

# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

9

trois zero pour son cube 125 , & ainsi de suite. On divisera ce nombre ainsi augmenté par une semblable puissance de 2 , sçavoir par 2 pour 5 , par 4 pour son quarré 25 , par 8 pour son cube 125 , & ainsi de suite.

Comme pour multiplier 128 par 5 , on divisera 1280 par 2 , & le quotient 640 sera le produit qu'on cherche. Mais pour multiplier 128 par 25 , quarré de 5 , on divisera 12800 par 4, quarré de 2 , & le quotient donnera 3200 pour le produit. Si on veut multiplier le même nombre 128 par 125 , cube de 5 , on divisera 128000 par 8 , cube de 2 , & le quotient 16000 sera le produit cherché. On fera les mêmes opérations pour les autres puissances, comme on le voit dans la table suivante , qui n'a été continuée que jusqu'à la 7<sup>e</sup> puissance.

|       |       |        |         |
|-------|-------|--------|---------|
| 1280  | 12800 | 128000 | 1280000 |
| 5     | 25    | 125    | 625     |
| 2     | 4     | 8      | 16      |
| <hr/> | <hr/> | <hr/>  | <hr/>   |
| 640   | 3200  | 16000  | 80000   |

|          |           |            |
|----------|-----------|------------|
| 12800000 | 128000000 | 1280000000 |
| 3125     | 15625     | 78125      |
| 32       | 64        | 128        |
| <hr/>    | <hr/>     | <hr/>      |
| 400000   | 2000000   | 10000000   |

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 11 livres le louis d'or, on écrira 53 sous 53 , en l'avancant d'une colonne vers la gauche, en sorte que

le 3 réponde sous le 5 , & la somme de ces  
 53 deux nombres ainsi disposés , donnera 583  
 53 livres pour la valeur de 53 louis d'or , à 12  
 583 livres le louis d'or.

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 12  
 liv. 10 s. le louis d'or , on prendra la huitieme  
 partie du nombre donné 53 , augmenté de deux  
 zero vers la droite , sçavoir la huitieme partie de  
 5300 considéré comme 5300 livres , & l'on aura  
 662 liv. 10 s. pour la valeur de 53 louis d'or à 12  
 liv. 10 s. le louis d'or.

Pour sçavoir combien valent 53 louis d'or à 12  
 liv. 5 s. le louis d'or , on multipliera 53 , que l'on  
 considérera comme 53 livres , par 7 , & le produit  
 371 liv. encore par 7. Le quart du second pro-  
 duit 2597 liv. donnera 649 liv. 5 s. pour la valeur  
 de 53 louis d'or à 12 liv. 5 s. le louis d'or.

Pour sçavoir combien il y a de pouces en 53  
 pieds , il faut multiplier 53 par 12. Ce qui se peut  
 faire en multipliant 53 par 2 , & le produit 106  
 par 6 ; ou bien en multipliant 53 par 3 , & le pro-  
 duit 159 par 4. Mais cela se peut faire sans  
 multiplication , en écrivant 53 sous 53 , & en-  
 core une fois 53 , en l'avancant d'une co-

53 lonne, en sorte que le 3 réponde sous le  
 53 53 ; car la somme de ces trois nombres  
 53 ainsi disposés, donnera 636 pour le nombre  
 636 des pouces qui sont compris en 53 pieds.  
 C'est aussi le nombre des deniers qui sont com-  
 pris en 53 sols.

Pour multiplier ensemble deux nombres compo-  
 sés de plusieurs figures , par exemple 12 & 18 ,  
 on réduira le premier nombre 12 en ces trois par-  
 ties composées chacune d'une seule figure, 2, 4, 6,

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 71

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| $\left\{ \begin{array}{l} 4 - 8 \\ 6 - 12 \\ 8 - 16 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 4 - 16 \\ 6 - 24 \\ 8 - 32 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 4 - 24 \\ 6 - 36 \\ 8 - 48 \end{array} \right.$ | <p>&amp; pareillement le second nombre 18 en ces trois parties composées aussi chacune d'une seule figure 4, 6, 8, dont chacune sera multipliée par la première partie 2 du premier nombre; ensuite par la seconde figure 4 du même premier nombre; enfin par la troisième figure 6 du même premier nombre: la somme de tous les produits sera celui qui doit provenir de la multiplication de 12 par 18, ou de 18 par 12.</p> |
|--|---|---|--|

### *Multiplication par les doigts.*

**S**I vous voulez multiplier 7 par 8, premièrement prenez la différence de 7 à 10 qui est 3, & ayant levé les dix doigts des deux mains, abaissez trois doigts d'une main qui sera, par exemple, la gauche. Secondement, prenez la différence de 8 à 10, qui est deux, & abaissez deux doigts de l'autre main qui sera la droite. Troisièmement, multipliez le nombre des doigts levés d'une main par le nombre des doigts levés de l'autre, le produit, qui est 6, sera retenu pour être mis au rang des unités. Quatrièmement, ajoutez le nombre des doigts abaissés des deux mains, & la somme qui est ici 5, doit être placée au rang des dizaines. Ainsi on trouvera que 7 multiplié par 8 produit 56.

On voit, par cet exemple, qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des deux nombres donnés, que le produit de ces deux différences, défi-

gnées par les doigts levés de chaque main ; donnera le nombre des unités du produit total , & que la somme des doigts abaissés donnera les dizaines de ce produit total.

*Autre multiplication abrégée.*

**S** I l'on avoit un grand nombre à multiplier par un autre grand nombre , comme 453216 par 3289 , il seroit bon de se servir de cette méthode que nous avons tirée de Langius. Je choisis le plus petit de ces nombres 3289 pour le multiplicateur , & je fais une table à deux colonnes.

|         |   |            |
|---------|---|------------|
| 453216  | 1 | 453216     |
| 906432  | 2 | 3289       |
| 1359648 | 3 | —————      |
| 1812864 | 4 | 4078944    |
| 2266080 | 5 | 3625728    |
| 2719296 | 6 | 906432     |
| 3172512 | 7 | 1359648    |
| 3625728 | 8 | —————      |
| 4078944 | 9 | 1490627424 |

L'une de ces colonnes , qui est à droite , contient les premiers chiffres de la numération 1, 2, 3, &c. jusqu'au plus grand chiffre 9 , qui se trouve dans le multiplicateur 3289 : ces chiffres sont disposés les uns sous les autres , comme on le voit dans la table. L'autre colonne contient le nombre à multiplier 453216 , qui est placé vis-à-vis de l'unité. On a mis le double de ce nombre vis-à-vis de 2 , le triple vis-à-vis de 3 , & ainsi de suite jusqu'au plus haut chiffre 9 , qui est dans la seconde colonne.



## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 13

Cette table étant ainsi faite , on disposera le nombre à multiplier & le multiplicateur l'un sous l'autre à l'ordinaire : comme le premier chiffre du multiplicateur est 9 , on prendra le nombre qui lui répond dans la table , & on l'écrira au-dessous des nombres donnés : le second chiffre étant 8 , on prendra le nombre qui lui correspond dans la table , & on l'écrira au-dessous du premier écrit , en observant de le reculer d'une place , parce que le 8 exprime des dizaines. On fera la même chose à l'égard des autres chiffres qui se trouvent dans le multiplicateur. Enfin on fera l'addition de ces nombres ; la somme donnera le produit des deux nombres proposés.

## PROBLEME VII.

### *Division abrégée.*

**P**OUR diviser un grand nombre par un plus petit, comme 1492862 par 432 , il faudroit mettre, selon la méthode commune , le diviseur 432 vers la gauche sous 1492 , pour sçavoir combien de fois il y est contenu. Mais pour n'employer que l'addition & la soustraction , faites un tarif du diviseur 432 en le mettant vers la droite vis-à-vis de 1 , & l'ajoutez à lui-même , pour avoir son double 864 , que vous écrirez sous 432 vis-à-vis de 2. Puis ajoutez le même nombre 432 à son double 864 , pour avoir son triple 1296 , que vous écrirez en bas vis-à-vis de 3. Ajoutez pareillement le même diviseur 432 à son triple 1296 , pour avoir son quadruple 1728 , que vous écrirez dessous vis-à-vis de 4 , & ainsi des autres , en écrivant toujours les multiples du diviseur 432 , vis-à-vis des autres nombres 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10. Le der-

|    |      |         |        |
|----|------|---------|--------|
| 1  | 432  | 1492992 | } 3456 |
| 2  | 864  | 1296... |        |
| 3  | 1296 | <hr/>   |        |
| 4  | 1728 | 1969    |        |
| 5  | 2160 | 1728    |        |
| 6  | 2592 | <hr/>   |        |
| 7  | 3024 | 2419    |        |
| 8  | 3456 | 2160    |        |
| 9  | 3888 | <hr/>   |        |
| 10 | 4320 | 2592    |        |
|    |      | 2592    |        |
|    |      | <hr/>   |        |
|    |      | 000     |        |

nier 10 doit avoir vis-à-vis de lui le même diviseur 432 augmenté d'un zero vers la droite, si le tarif est bien fait.

Cette préparation étant faite, pour sçavoir tout d'un coup combien de fois le diviseur 432 est contenu dans 1492, cherchez ce nombre dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus. C'est ici 1296, qui se trouvant à côté de 3, fait voir que 3 doit être la première figure du quotient. Si vous ôtez ce nombre 1296 de 1492, il restera 196. A ce reste joignez vers la droite la figure 9 qui suit 1492 dans le dividende pour avoir 1969 que vous chercherez dans le tarif, ou celui qui étant moindre en approche le plus, & qui est ici 1728. Comme ce nombre se trouve à côté de 4, vous poserez 4 pour la seconde figure du quotient. Ensuite vous ôterez ce nombre 1728 de 1969, & il restera 241. A ce reste vous joindrez vers la droite la figure 9 qui suit 14929 dans le dividende, pour avoir 2419 que vous chercherez

dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus, & qui est ici 2160. Le nombre 5 qui est à côté du nombre 2160, sera la troisième figure du quotient. On continuera à faire les mêmes opérations qu'on vient de faire, jusqu'à ce que la division soit achevée.

Cette maniere est très-commode, quand on a plusieurs grands nombres à diviser par un même nombre, parce qu'ayant fait un tarif du diviseur, il sert pour faire toutes les divisions dont on a besoin. C'est ce qui arrive aux arpenteurs qui ont souvent de grands nombres à diviser par 144, lorsqu'ils veulent réduire des pouces quarrés en pieds quarrés, ou par 1728, quand ils veulent réduire des ponce cubes en pieds cubes.

Pour diviser un nombre quelconque par telle puissance qu'on voudra de 5, on le multipliera par une semblable puissance de 2. On retranchera du produit vers la droite autant de figures que le degré de la puissance contiendra d'unités. Les figures qui resteront vers la gauche, seront le quotient, & celles qui auront été retranchées seront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur sera une semblable puissance de 10.

Comme pour diviser 128 par 5, on retranchera le 6 qui est à la droite de 256, double de 128, & l'on aura  $25\frac{4}{10}$  pour le quotient. Pour diviser le même nombre 128 par 25, quarré de 5, on retranchera les deux dernières figures 12 qui sont à la droite de 512, quadruple de 128, & l'on aura  $5\frac{12}{100}$  pour le quotient. Ainsi des autres.

Pour diviser un nombre quelconque par un plus petit, qui soit produit par la multiplication de deux autres plus petits, on divisera le nombre pro-

posé par l'un de ces deux plus petits nombres, & le quotient sera divisé par l'autre nombre. Le second quotient sera celui qu'on cherche.

Comme pour diviser 20736 par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux nombres 3, 8, aussi-bien que de ces deux, 4, 6, on prendra la huitième partie de son tiers, ou la sixième partie de son quart : ou bien, ce qui est la même chose, on prendra le tiers de sa huitième partie, ou le quart de sa sixième partie, & l'on aura 864 pour le quotient cherché.

D'où il suit que pour réduire en toises quarrées des pieds quarrés, on doit prendre la sixième partie de la sixième partie du nombre proposé des pieds quarrés, parce qu'une toise quarrée contient 36 pieds quarrés, & que 6 fois 6 font 36. Ainsi pour réduire en toises quarrées 20736 pieds quarrés, on prendra la sixième partie de la sixième partie 3456 de 20736, & l'on aura 576 pour le nombre des toises quarrées qui sont contenues en 20736 pieds quarrés. Pareillement, pour réduire en toises quarrées 542 pieds quarrés, on prendra la sixième partie de la sixième partie 90  $\frac{2}{3}$  de 542, & l'on aura 15 toises quarrées & 2 pieds quarrés pour la valeur de 542 pieds quarrés.

## P R O B L E M E V I I I.

*De quelques propriétés des nombres.*

### L

**L**E nombre 9 est tel que, s'il multiplie un nombre entier quelconque, la somme des figures du produit est divisible par le même nombre 9 sans reste. Si on multiplie, par exemple, 53 par 9, & qu'on

qu'on ajoute ensemble les figures du produit 477, la somme 18 est exactement divisible par 9.

## II.

Si l'on prend deux nombres quelconques, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence est divisible par 3. Soient pris les deux nombres 6, 5, le premier 6 est divisible par 3. Si on choisit les deux nombres 11, 5, leur différence 6 est divisible par 3. Enfin si on prend les deux nombres 7, 5, leur somme est divisible par 3.

## III.

On peut diviser par 6 le produit de deux nombres dont les carrés ajoutés ensemble font un nombre carré; ainsi 12, produit de ces deux nombres 3, 4, dont les carrés 9, 16, ajoutés ensemble, font le nombre carré 25, dont le côté est 5, est divisible par 6.

*Pour trouver deux nombres dont les carrés fassent ensemble un nombre carré, multipliez deux nombres quelconques. Le double de leur produit sera l'un des deux nombres qu'on cherche, & la différence de leurs carrés sera l'autre nombre.*

Comme si l'on multiplie ces deux nombres 2, 3, dont les carrés sont 4, 9, le produit sera 6, dont le double 12, & la différence 5 des carrés 4, 9, sont deux nombres tels que leurs carrés 144, 25, font ensemble ce nombre carré 169, dont le côté est 13. Voyez les problèmes 9 & 10.

## IV.

La somme & la différence de deux nombres quelconques, dont les carrés différent d'un nom-

bre carré, sont chacune ou un nombre carré, ou la moitié d'un nombre carré.

Ainsi 16, somme des deux nombres 6, 10, dont les carrés 36, 100, différent du nombre carré 64, qui a 8 pour racine carrée, & leur différence 4, sont chacune un nombre carré. De même 18, somme des deux nombres 8, 10, dont les carrés 64, 100, différent du nombre carré 36, qui a 6 pour racine, & leur différence 2, sont les moitiés de ces deux nombres carrés 36, 4.

*Pour trouver deux nombres dont la somme & la différence soient chacune un nombre carré, auquel cas les carrés de ces deux nombres différeront aussi d'un nombre carré; choisissez deux nombres à volonté, comme 2, 3, dont le produit est 6, & dont les carrés sont 4, 9. La somme 13 de ces deux carrés, & le double 12 du produit 6, sont les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 25, & leur différence 1, sont chacun un nombre carré: de plus leurs carrés 169, 144, différent ensemble du nombre carré 25, qui a 5 pour racine carrée.*

*Pour trouver deux nombres dont la somme & la différence soient chacune la moitié ou le double d'un nombre carré, auquel cas leurs carrés différeront aussi d'un nombre carré; choisissez à volonté deux nombres, comme 2, 3, dont les carrés sont 4, 9. La somme 13 de ces deux carrés, & leur différence 5 sont les deux nombres qu'on cherche. Car leur somme 18, & leur différence 8 sont les moitiés de ces deux nombres carrés 36, 16, ou les doubles de ces deux autres nombres carrés 9, 4: de plus leurs carrés 169, 25, différent de ce nombre carré 144, qui a 12 pour racine carrée.*



## V.

Tout nombre carré finit par deux zeros , ou par l'une de ces cinq figures, 1, 4, 5, 6, 9. Cette proposition sert à faire connoître quand un nombre proposé n'est point carré : c'est lorsqu'il ne finit ni par deux zeros , ni par quelque'une des cinq figures précédentes. Quand même il finiroit par deux zeros , on peut assurer qu'il n'est point carré , lorsque ces deux zeros ne sont pas précédés de quelque'une des cinq figures précédentes.

## VI.

Toute fraction carrée , c'est-à-dire , qui a sa racine carrée , est telle que le produit du numérateur par le dénominateur a sa racine carrée. Cette proposition sert à faire connoître quand une fraction proposée est carrée : c'est lorsqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur , le produit est un nombre carré.

Ainsi l'on connoît que cette fraction  $\frac{28}{63}$  est carrée , parce qu'en multipliant le numérateur 28 par le dénominateur 63 , le produit 1764 est un nombre carré , dont le côté est 42 ; alors la racine carrée de la fraction proposée  $\frac{28}{63}$  sera  $\frac{42}{63}$  , en retenant le même dénominateur 63 , ou bien  $\frac{28}{42}$  , en retenant le même numérateur 28. Car l'une & l'autre de ces deux fractions  $\frac{28}{42}$  ,  $\frac{42}{63}$  , est égale à  $\frac{2}{3}$  , qui est la racine carrée de la fraction proposée  $\frac{28}{63}$  ou  $\frac{2}{3}$ .

## VII.

Toute fraction cubique , c'est-à-dire , qui a sa racine cubique , est telle qu'en multipliant le numérateur par le carré du dénominateur , ou le dénominateur par le carré du numérateur , le

produit a sa racine cubique. Cette proposition sert à *faire connoître quand une fraction proposée est cubique* : c'est lorsqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur , ou le dénominateur par le numérateur , le produit est un nombre cubique.

Ainsi l'on connoît que cette fraction  $\frac{24}{375}$  est cubique , parce qu'en multipliant le numérateur 24 par le quarré 140625 du dénominateur 375 , le produit 3375000 a sa racine cubique 150 ; ou bien parce qu'en multipliant le dénominateur 375 par le quarré 576 du numérateur 24 , le produit 216000 a 60 pour racine cubique : alors la racine cubique de la fraction proposée  $\frac{24}{375}$  fera  $\frac{150}{375}$  en retenant le même dénominateur 375 ; ou bien  $\frac{24}{60}$  en retenant le même numérateur 24. Car l'une & l'autre de ces deux fractions  $\frac{150}{375}$  ,  $\frac{24}{60}$  , est égale à  $\frac{2}{5}$  qui est la racine cubique de la fraction proposée  $\frac{24}{375}$  , ou  $\frac{8}{125}$ .

## VIII.

Quoiqu'il ne soit pas possible de trouver deux puissances homogenes , dont la somme & la différence soient chacune une semblable puissance , comme deux quarrés dont la somme & la différence soient chacune un nombre quarré , ou deux cubes dont la somme & la différence soient chacune un nombre cubique ; néanmoins il est possible & même très-facile de trouver deux nombres triangulaires , dont la somme & la différence soient chacun un nombre triangulaire.

Voici deux nombres triangulaires 15 , 21 , dont les côtés sont 5 & 6 : leur somme 36 , & leur différence 6 , sont aussi des nombres triangulaires , dont les côtés sont 8 & 3. Voici encore deux autres :

nombre triangulaire 780, 990, dont les côtés sont 39 & 44 : leur somme 1770, & leur différence 210, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtés sont 59, 20. Si vous voulez encore deux autres nombres triangulaires, les voici ; 1747515, 2185095, dont les côtés sont 1869, 2090 : leur somme 3932610, & leur différence 437580, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtés sont 2804, 935.

On appelle *nombre triangulaire* celui qui provient de la somme de quelques-uns des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. pris de suite en commençant par l'unité. On peut en prendre autant qu'on voudra, & le dernier de ceux qui seront pris, & qui sera le plus grand, est appelé le *côté* du nombre triangulaire. Ainsi l'on connoît que ce nombre 10 est triangulaire, & que son côté est 4, parce qu'il est égal à la somme des quatre premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, dont le dernier & plus grand est 4. Il a été appelé *triangulaire*, parce que l'on peut disposer 10 points en forme de triangle équilatéral, dont chaque côté en comprend 4 ; ce qui a fait dire que 4 étoit le côté du nombre triangulaire 10.

De même 21 est un nombre triangulaire, & son côté est 6, parce qu'il est égal à la somme des 6 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le dernier & le plus grand est 6. Ces nombres 55, 78 sont des nombres triangulaires. Consultez le traité du triangle arithmétique par M. Pascal.

*Pour connoître si un nombre proposé est triangulaire*, il faut le multiplier par 8, & ajouter 1 au produit ; si cette somme a une racine quarrée, le nombre proposé sera triangulaire. Ainsi l'on con-

noît que ce nombre 10 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 80 étant augmenté de 1, la somme 81 a pour racine quarrée 9. On connoît aussi que ce nombre 3932610 est triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 31460880 étant augmenté de 1, la somme 31460881 est un nombre quarré, dont la racine est 5609.

*Pour avoir le côté d'un nombre triangulaire, il faut prendre la plus petite moitié de la racine trouvée. Ainsi pour avoir le côté du nombre triangulaire 10, prenez 4, la plus petite moitié de 9, racine trouvée, & 4 fera le côté de 10. De même pour avoir le côté du nombre triangulaire 3932610, prenez la plus petite moitié de 5609, racine trouvée, & 2804 fera le côté du nombre triangulaire proposé.*

## IX.

La différence de deux puissances homogenes, comme de deux nombres quarrés, de deux nombres cubiques &c. est divisible par la différence de leur côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 3, différence de ces côtés; & le quotient 7 est égal à la somme des mêmes côtés. La différence 117 des deux cubes 125, 8, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 3, différence de ces côtés, & le quotient 39 est égal à la somme de 10, produit des côtés 5, 2, & de 29, somme de leurs quarrés 25, 4.

## X.

La différence de deux puissances homogenes,

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 23

dont l'exposant commun est un nombre pair, est divisible par la somme de leurs côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7, somme de ces côtés, & le quotient 3 est égal à la différence des mêmes côtés. La différence 609 des deux quarrés-quarrés 625, 16, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7, somme de ces côtés, & le quotient 87 est égal au produit sous la différence 3 des mêmes côtés 5, 2, & la somme 29 de leurs quarrés 15, 4.

XI.

La somme de deux puissances homogenes, dont l'exposant commun est un nombre impair, est divisible par la somme de leurs côtés. La somme 133 des deux cubes 125, 8, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 19 est égal à l'excès de 29, somme des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, sur le produit 10 des même côtés. La somme 3157 des deux surfolides 3125, 32, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 451 est égal à l'excès de la somme 741 des quarrés-quarrés 625, 16, des deux côtés, 5, 2, & du quarré 100, produit de 10 sous les mêmes côtés, sur le produit 290 sous la somme 29 des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, & le produit 10 des mêmes côtés.

XII.

Toutes les puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ont autant de différences que leurs exposans contiennent d'unités, les dernieres

différences étant toujours égales entre elles dans chaque puissance; sçavoir, les secondes différences, c'est-à-dire, les différences des différences dans les quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. car ces secondes différences sont 2, les premieres étant les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. Les troisiemes différences, c'est-à-dire, les différences des différences des premieres différences dans les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. car ces troisiemes différences sont 6, les premieres étant 7, 19, 37, 61, 91, &c, & les secondes, ou les différences de ces différences étant 12, 18, 24, 30, &c. qui se surpassent de 6, qui est leur troisieme différence. Ainsi des autres.

Quarrés. 1<sup>re</sup> Diff. 2<sup>e</sup> Diff.

|    |    |   |
|----|----|---|
| 1  |    |   |
| 4  | 3  |   |
| 9  | 5  | 2 |
| 16 | 7  | 2 |
| 25 | 9  | 2 |
| 36 | 11 | 2 |



Cubes. 1<sup>res</sup> Diff. 2<sup>es</sup> Diff. 3<sup>es</sup> Diff.

|     |    |    |   |
|-----|----|----|---|
| 1   |    |    |   |
| 8   | 7  |    |   |
| 27  | 19 | 12 | 6 |
| 64  | 37 | 18 | 6 |
| 125 | 61 | 24 | 6 |
| 216 | 91 | 30 |   |

Il arrive la même chose aux nombres *polygones*, qui se forment par une continuelle addition des nombres en progression arithmétique qu'on appelle *gnomons*, dont le premier est l'unité, qui est virtuellement nombre polygone de toute espèce; aux nombres *pyramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres polygones considérés comme des gnomons, dont le premier est toujours l'unité; & aux nombres *pyramido-pyramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres pyramidaux considérés comme des gnomons, dont le premier est toujours l'unité.

Lorsque les gnomons se surpassent de l'unité, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les nombres

ajouté à lui-même, fasse le même nombre qu'étant multiplié par lui-même, sçavoir 4. Car tout autre nombre, comme 5, étant ajouté à lui-même, fait 10, & étant multiplié par lui-même fait 25.

Quoiqu'on ne puisse pas trouver deux nombres entiers dont la somme soit égale à leur produit, on peut néanmoins en trouver aisément deux en fractions, & même en raison donnée, dont la somme soit égale à leur produit. C'est en divisant la somme des deux termes de la raison donnée, par chacun de ces deux termes. Si l'on veut, par exemple, leur donner la raison de 2 à 3, on divisera séparément leur somme 5 par 2 & par 3, & l'on aura ces deux nombres  $2\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{2}{3}$ , qui ajoutés font autant que multipliés ensemble, sçavoir,  $4\frac{1}{6}$ .

### XV.

Un nombre quelconque est la moitié de la somme de deux autres également éloignés de lui, l'un par défaut, & l'autre par excès: par exemple, 6 est la moitié de la somme 12 des deux nombres 5 & 7, qui en sont également éloignés, ou des deux nombres 4 & 8, qui en sont aussi également éloignés, &c.

### XVI.

Le nombre 37 est tel, qu'étant multiplié par chacun de ces nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, qui sont en progression arithmétique, tous les produits sont composés de trois figures semblables.

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 37    | 37  | 37  | 37  | 37  | 37  | 37  | 37  | 37  |
| 3     | 6   | 9   | 12  | 15  | 18  | 21  | 24  | 27  |
| <hr/> |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 111   | 222 | 333 | 444 | 555 | 666 | 777 | 888 | 999 |

## XVII.

Les deux nombres 5 & 6 sont appelés *sphériques*, parce que leurs puissances finissent par les mêmes nombres. Par exemple, les puissances de 5, sçavoir 25, 125, 625, &c. finissent par le même nombre 5. De même, les puissances de 6; sçavoir 36, 216, 1296, &c. finissent par le même nombre 6.

Le nombre 5 a cela de particulier, qu'étant multiplié par un nombre pair, comme par 8, le produit 40 se termine par un zero.

L'autre nombre 6 a cela aussi de particulier, qu'il est le premier des nombres qu'on appelle *parfaits*, parce qu'ils sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes; car ce nombre 6 est égal à la somme de ses parties aliquotés, 1, 2, 3. Le nombre 28 est aussi un nombre parfait, parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14.

Pour trouver autant de nombres parfaits qu'on voudra, il faut se servir de la progression double, dont le premier terme soit 2, & non pas l'unité, en écrire les termes de suite, & les séparer de deux en deux, avec cette précaution, que le second terme 4 sera répété dans la seconde séparation, & y tiendra la première place, après avoir tenu la seconde place dans la première séparation, comme vous le voyez ici. Ces termes étant ainsi séparés,

|         |         |           |            |
|---------|---------|-----------|------------|
| 2, 4    | 4, 8    | 16, 32    | 64, 128    |
| 6       | 28      | 496       | 8128       |
| 3 par 2 | 7 par 4 | 31 par 16 | 127 par 64 |

$$\begin{array}{cc|cc} 256, & 512 & 1024, & 2048 & \&c. \\ 130816 & & 209628 & & \&c. \end{array}$$

on les prendra deux à deux dans leurs séparations, & après avoir diminué de l'unité celui qui tient la seconde place dans chaque séparation, on les multipliera par celui qui tient la première place dans la même séparation ; le produit sera un nombre parfait. Ainsi pour avoir le premier nombre parfait, on considérera que la première séparation contient ces deux termes 2, 4 ; on ôtera 1 de 4, & l'on multipliera le reste 3 par 2, le produit 6 est le premier nombre parfait. De même pour avoir le second nombre parfait, on considérera que la seconde séparation contient ces deux termes 4, 8, on ôtera 1 de 8, & l'on multipliera le reste 7 par 4 ; le produit 28 sera le second nombre parfait ; on multipliera ensuite 31 par 16 pour avoir le troisième nombre parfait ; & ainsi des autres.

### R E M A R Q U E.

Les nombres parfaits sont si rares, qu'il ne s'en trouve qu'un depuis un jusqu'à dix, un depuis dix jusqu'à cent, un depuis cent jusqu'à mille, un depuis mille jusqu'à dix mille, un depuis dix mille jusqu'à cent mille, &c. De plus il est à remarquer que tous les nombres parfaits ont alternativement pour leur dernière figure 6 & 8.

*Pour trouver toutes les parties aliquotes, ou tous les diviseurs d'un nombre, il faut diviser ce nombre & ses quotiens par les nombres premiers, jusqu'à ce que le dernier quotient soit l'unité. Ensuite on multipliera ces diviseurs premierement trouvés, de*

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 31

**la maniere qu'on l'enseignera, pour avoir tous les autres.**

Soit proposé le nombre 210, dont on veut avoir tous les diviseurs, ou routes les parties aliquotes. Divisez 210 par 2, il viendra au quotient

|     |  |     |  |    |  |   |  |   |
|-----|--|-----|--|----|--|---|--|---|
| 210 |  | 105 |  | 35 |  | 7 |  | 1 |
| 2   |  | 3   |  | 5  |  | 7 |  |   |

105 , que vous diviserez par 3 ; puis vous diviserez le second quotient 35 par 5 , qui donnera 7 pour troisieme quotient, lequel n'a point d'autre diviseur que lui-même ; & le quotient est l'unité.

Disposez tous ces diviseurs de la maniere que vous le voyez dans la table suivante , en commençant par le nombre 2 ; mettez ensuite le nombre 3 au-dessous , mais rangé un peu à côté. Vous

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 2 & & \\ & & & & \hline & & & 3. & 6. & & \\ & & & \hline & & 5. & 10. & 15. & 30. & \\ & \hline 7. & 14. & 21. & 42. & 35. & 70. & 105. & 210. \end{array}$$

multipliez ces deux nombres 2 , 3 , & vous écri-  
rez le produit 6 à côté de 3 , & dans le même rang,  
comme vous le voyez. Ces nombres 2 , 3 , 6 ,  
seront des diviseurs de 210. Puis mettez le nom-  
bre 5 , troisième diviseur , au-dessous & un peu à côté ,  
multipliez le par tous les diviseurs déjà trouvés ,  
& vous aurez pour diviseurs nouveaux 10 , 15 ,  
30. Enfin posez le nombre 7 au dessous & un peu  
à côté ; multipliez - le par tous les diviseurs déjà  
trouvés , & vous aurez encore pour diviseurs

32 RECREAT. MATHEMAT. ET PHYS.

14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Tous ces nombres pris pour diviseurs, ou trouvés dans les deux tables précédentes, joints à l'unité, seront les diviseurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, si on en retranche le nombre proposé 210.

On a disposé les deux tables précédentes & les suivantes, comme on le voit, pour donner plus de lumière dans une opération qui est assez abstraite d'elle-même.

Si vous voulez trouver tous les diviseurs, ou les parties aliquotes de 2032, divisez d'abord ce nombre par 2, premier nombre premier, & tous les quotients qui peuvent l'être, comme vous le voyez dans la table suivante. Le dernier quotient

|      |  |      |  |     |  |     |  |     |  |   |
|------|--|------|--|-----|--|-----|--|-----|--|---|
| 2032 |  | 1016 |  | 508 |  | 254 |  | 127 |  | 1 |
| 2    |  | 2    |  | 2   |  | 2   |  | 127 |  |   |

127 étant nombre premier ne peut être divisé que par lui-même, & il a pour quotient l'unité.

Disposez tous ces diviseurs de la manière que vous le voyez dans la table suivante, pour trouver les autres. Après avoir mis le premier diviseur 2, mettez le même 2, qui est second diviseur, au-dessous, & à côté multipliez ces deux diviseurs 2, 2, & vous aurez 4, que vous rangerez à côté comme dans cette table. Posez encore 2 au-des-

|      |      |      |       |        |  |
|------|------|------|-------|--------|--|
|      |      |      |       | 2.     |  |
|      |      |      |       | <hr/>  |  |
|      |      |      |       | 2. 4.  |  |
|      |      |      |       | <hr/>  |  |
|      |      |      |       | 2. 8.  |  |
|      |      |      |       | <hr/>  |  |
|      |      |      |       | 2. 16. |  |
|      |      |      |       | <hr/>  |  |
| 127. | 254. | 508. | 1016. | 2032.  |  |

sous

**PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE. 23**

**Sous :** suivant la règle précédente il faudroit multiplier tous les diviseurs trouvés par ce troisième diviseur 2 ; mais il est inutile de multiplier 2 par 2 , qui donneroit encore 4 déjà trouvé ; ainsi on néglige cette multiplication , & on multiplie seulement 4 par 2 , pour avoir 8 , qui est un nouveau diviseur.

Ensuite vous écrirez au dessous pour la quatrième fois le diviseur 2 , & vous vous contenterez de multiplier 8 par ce nombre 2 : ce qui donne 16 ; car il est inutile de multiplier tous les 2 précédents , puisqu'ils donneroient pour produits 4 , qui a déjà été trouvé. ( On observera la même chose à l'égard des autres nombres , dont la multiplication ne donneroit point de nouveau diviseur ).

Enfin vous poserez 127 au dessous des diviseurs , & à côté , vous multiplierez ce nombre une fois seulement par 2 , & par tous les autres diviseurs trouvés , & vous aurez 254 , 508 , 1016 , 2032 . Tous ces nombres pris pour diviseurs , ou trouvés dans la table précédente , seront les diviseurs cherchés , & les parties aliquotes cherchées , si on en retranche le nombre proposé 2032 .

On peut s'exercer sur les nombres 8128 & 2096128 , qui sont des nombres parfaits. On remarquera que toutes les puissances de 2 prises autant de fois que 2 est diviseur , sont des diviseurs & parties aliquotes de ces deux nombres , & que la somme de ces puissances & de l'unité est égale au dernier nombre premier , qui se trouve être 127 dans 8128 , & 2047 dans 2096128 .

*Autre manière de trouver les parties aliquotes , ou  
sous les diviseurs d'un nombre proposé.*

**Soit proposé le nombre 8128 , l'unité est tou-**  
**Tome I. C**



jours un diviseur de quelque nombre que ce soit ? ainsi vous la mettrez à la tête d'une premiere colonne , qui contiendra une partie des parties aliquotes ou diviseurs. Divisez ensuite ce même nombre 8128 , par le plus petit nombre qui se présente-

|       |       |                                   |
|-------|-------|-----------------------------------|
| 1     |       | ra , sçavoir par 2 , que l'on     |
| 2     | 4064  | peut connoître aisément , par-    |
| 4     | 2032  | ce que le nombre proposé          |
| 8     | 1016  | 8128 est pair , & le quotient     |
| 16    | 508   | sera 4064 , que vous écrirez à    |
| 32    | 254   | la droite , vis-à-vis le 2 dans   |
| 64    | 127   | une seconde colonne , pour        |
| <hr/> | <hr/> | second diviseur , qui se peut     |
| 127   | 8001  | encore diviser par le premier     |
|       | 127   | diviseur 2 ; ce qui fait que son  |
|       | <hr/> | quarré 4 sera aussi un diviseur , |
|       | 8128  | que vous écrirez au-dessous de    |
|       |       | son côté 2 , & vis-à-vis le se-   |
|       |       | cond quotient 2032 pour un au-    |

tre diviseur , qui se peut encore diviser par le premier diviseur 2 , ce qui fait son cube 8 qui sera aussi un diviseur , que vous écrirez au-dessous du quarré 4 , & vis-à-vis le troisieme quotient 1016 pour un autre diviseur , & ainsi de suite , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un dernier diviseur , qui ne se puisse plus diviser par le premier 2 , comme il arrive au sixieme quotient 127 , qui étant un nombre premier , fait connoître que tous les diviseurs du nombre proposé 8128 sont trouvés , où vous voyez que leur somme est égale à ce nombre , & que par conséquent il est parfait.

C'est de la même façon que nous avons trouvé tous les diviseurs de cet autre nombre 2096128 , qui est aussi parfait , parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquotes : où l'on voit que le dernier

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE: 33  
 quotient 2047, qui répond à la dixième puissance  
 1024 du premier diviseur 2, est aussi un nombre

|       |         |
|-------|---------|
| 1     |         |
| 2     | 1048064 |
| 4     | 524032  |
| 8     | 262016  |
| 16    | 131008  |
| 32    | 65504   |
| 64    | 32752   |
| 128   | 16376   |
| 256   | 8188    |
| 512   | 4094    |
| 1024  | 2047    |
| <hr/> |         |
| 2047  | 2094081 |
|       | 2047    |
| <hr/> |         |
|       | 2096128 |

premier : car s'il avoit pu être divisé par quelque  
 autre nombre que par 2, comme par 3, il auroit  
 fallu multiplier par ce nouveau diviseur 3, toutes  
 les puissances du premier diviseur 2, & diviser le  
 nombre proposé & tous les quotiens par ce même  
 nouveau diviseur 3, pour avoir d'autres diviseurs,  
 &c, comme vous allez voir dans l'exemple suivant.

### XVIII.

Le nombre 110 est égal à la moitié de la somme  
 240 de ses parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 5,  
 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Le nom-  
 bre 672 est aussi égal à la moitié de la somme  
 344 de ses parties aliquotes, que nous avons

trouvées par une méthode semblable à la précédente, sans qu'il soit besoin de la répéter davantage. On peut trouver une infinité d'autres nombres qui auront la même propriété : on peut même en trouver d'autres qui seront la troisième partie, ou telle autre partie qu'on voudra de la somme de leurs parties aliquotes ; mais ce n'est pas ici le lieu d'en dire davantage.

|       |       |
|-------|-------|
| 1     |       |
| 2     | 336   |
| 4     | 168   |
| 8     | 84    |
| 16    | 42    |
| 32    | 21    |
| 3     | 224   |
| 6     | 112   |
| 12    | 56    |
| 24    | 28    |
| 48    | 14    |
| 96    | 7     |
| <hr/> |       |
| 252   | 1092  |
|       | 252   |
|       | <hr/> |
|       | 1344  |

## XIX.

Ces deux nombres 220 ; 284 ; sont appelés *amiables*, parce que le premier 220 est égal à la somme des parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142, du second 284 ; & réciproquement le second 284, est égal à la somme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 du premier 220. Ces parties aliquotes sont faciles à trouver par ce qui a été enseigné auparavant.

Pour trouver tous les nombres amiables par ordre, servez-vous du nombre 2, qui est tel que si de son triple 6, de son sextuple 12, & de l'octodécuple 72 de son quarré 4, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 5, 11, 71, dont les deux premiers 5, 11, étant multipliés ensemble, & leur produit 55 étant multiplié par le double 4 du nombre 2, ce second produit 220 sera le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour

# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

57

avoir l'autre qui est 284, on multipliera le troi-  
sieme nombre premier 71 par le même double 4  
du nombre 2 pris au commencement.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 3 \\
 \hline
 6 \\
 1 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2 \\
 6 \\
 \hline
 12 \\
 1 \\
 \hline
 11 \\
 5 \\
 \hline
 155
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 4 \\
 18 \\
 \hline
 72 \\
 1 \\
 \hline
 71 \\
 4 \\
 \hline
 284 \\
 4 \\
 \hline
 220
 \end{array}$$

Pour trouver deux autres nombres amiables, au  
lieu de 2, servez-vous d'une de ses puissances qui

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 3 \\
 \hline
 24 \\
 1 \\
 \hline
 23
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 8 \\
 6 \\
 \hline
 48 \\
 1 \\
 \hline
 47 \\
 23 \\
 \hline
 1081 \\
 16 \\
 \hline
 17296
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 64 \\
 18 \\
 \hline
 1152 \\
 1 \\
 \hline
 1151 \\
 16 \\
 \hline
 18416
 \end{array}$$

ait la même propriété, tel qu'est son cube 8. Car  
C iiij.

38. RECREAT. MATHEM. ET PHYS.

Si de son triple 24, de son sextuple 48, & de l'octodécuple 1152 de son quarré 64, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 23, 47, 1151, dont les deux premiers 23, 47, doivent être multipliés ensemble, & leur produit 1081 doit être encore multiplié par le double 16 du cube 8, afin d'avoir 17296 pour le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre, qui est 18416, on multipliera le troisieme nombre premier 1151 par le même double 16 du cube 8.

Si vous voulez deux autres nombres, au lieu de deux, ou de son cube 8, servez - vous de son quarré-cube 64, qui a la même propriété. Car si de son triple 192, de son sextuple 384, & de l'octodécuple 73728 de son quarré 4096, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 191, 383, 73727, par le moyen desquels, & par ce qui a été dit auparavant, on trouvera ces deux autres nom-

|           |               |               |
|-----------|---------------|---------------|
| 64        | 64            | 4096          |
| 3         | 6             | 18            |
| <hr/> 192 | <hr/> 384     | <hr/> 73728   |
| 1         | 1             | 1             |
| <hr/> 191 | <hr/> 383     | <hr/> 73727   |
|           | 191           | 128           |
|           | <hr/> 73153   | <hr/> 9437056 |
|           | 128           |               |
|           | <hr/> 9363584 |               |

bres 9363584, 9437056, qui sont amiables, ainsi des autres. Consultez ce qui a été dit sur le

parties aliquotes au livre troisieme des nouveaux élémens d'algebre , tant dans les problêmes , que dans les questions. Consultez aussi Schooten dans ses *sectiones miscellaneæ*.

*Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.*

**F**Aites une table qui contiendra plusieurs rangs de nombres. Commencez par le second de ces rangs , qui doit contenir la progression double \* , dont le premier terme sera 2. Triplez les termes de cette progression ; ces nombres triples 6 , 12 , 24 , &c , placés chacun sous celui dont il est formé , composeront le troisieme rang. Ces nombres diminués de l'unité 5 , 11 , 23 , &c , & placés chacun au-dessus du terme qui lui répond , composeront le premier rang. Enfin l'on aura les termes du quatrieme rang 71 , 287 , &c , en multipliant 12 , second terme du troisieme rang , par 6 , premier terme de ce même rang ; le produit 72 diminué de l'unité , qui est 71 , sera le premier terme du quatrieme rang , & on le placera sous 12. On multipliera ensuite 24 , troisieme terme , par le précédent 12 ; & le produit 288 diminué de l'unité qui est 287 , sera le second terme du quatrieme rang. On trouvera les autres termes par la même mé-

\*Voyez le prob. II.

|   |    |     |      |      |       |
|---|----|-----|------|------|-------|
| 5 | 11 | 23  | 47   | 95   | 191   |
| 2 | 4  | 8   | 16   | 32   | 64    |
| 6 | 12 | 24  | 48   | 96   | 192   |
|   | 71 | 287 | 1151 | 4607 | 18431 |

thode , c'est-à-dire , en multipliant un terme du troisieme rang par celui qui le précède immediate-

ment dans ce même rang, & en plaçant le produit diminué de l'unité au dessous du terme qu'on a choisi dans le troisième rang, pour le multiplier avec le précédent.

Cette table étant ainsi construite, on choisira trois nombres premiers, dont l'un fera pris dans le quatrième rang; les autres seront pris dans le premier rang: l'un de ceux-ci doit répondre au nombre premier choisi du quatrième rang, c'est-à-dire, celui qui est placé dans le premier rang au dessus du nombre premier choisi dans le quatrième rang: l'autre sera celui qui précède immédiatement dans le premier rang le second dont on vient de parler. Par exemple, si l'on choisit dans le quatrième rang le nombre 71, celui qui lui répond dans le premier rang est 11, & 5 est celui qui précède immédiatement 11; ces nombres 5 & 11 étant nombres premiers, seront les termes avec lesquels on trouvera deux nombres *amiables*, en suivant ce qu'on va dire. Multipliez 71 par 4, terme qui lui répond dans le second rang; le produit 284, est l'un de ces nombres *amiables*. Multipliez aussi 11 par le même terme 4, qui lui répond dans le second rang, & le produit 44 par 5, terme qui précède immédiatement 11 dans le premier rang; ce second produit 220 sera l'autre des nombres *amiables* que l'on cherche. On trouvera d'autres nombres *amiables*, en suivant la même méthode.

### R E M A R Q U E.

Si on choisissoit 4607 dans la quatrième rang pour un des nombres premiers, on trouveroit que 95, qui lui répond dans le premier rang, n'est point un nombre premier: ainsi on ne pourroit



## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 49

point se servir de ce terme pour choisir des nombres amiables.

Comme il est difficile de connoître si un nombre est premier, quand il est un peu grand, nous ajouterons à la fin de ce problème une table de tous les nombres premiers, qui sont compris entre 1 & 10000.

### X X.

Les quarrés 961, 1156, des deux nombres 31, 34, sont tels que le premier 961 avec ses parties aliquotes 1, 31, fait une somme 993 égale à la somme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, du second 1156 dont le côté est 34.

### X X I.

Les deux nombres suivans 26, 20, sont tels que chacun avec ses parties aliquotes fait une même somme. Car le premier 26 avec ses parties aliquotes 1, 2, 13, fait 42, & le second 20 avec ses parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, fait aussi 42.

Il arrive la même chose aux deux nombres 488, 464, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 930 : aux deux nombres 11, 6, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 12 : & aux deux nombres 17, 10, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 18.

On peut même avoir trois nombres, dont chacun avec ses parties aliquotes fera une même somme, comme 20, 26, 41, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 42 ; 23, 14, 15, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 24 ; & 46, 55, 71, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 72.

Ces deux quarrés 106276, 165649 ont pour racine 326, 407. La somme des diviseurs de cha-

## 42 RECREAT. MATH. ET PHYS.

cun est 187131. Les diviseurs de 106276 sont : 1, 2, 4, 163, 326, 652, 26569, 53138, 106276. Ceux de 165649 sont 1, 11, 37, 121, 407, 1369, 4477, 15059, 165649.

Ces deux quarrés 16, 25, sont aussi tels que la somme des diviseurs de chacun est 31. Les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16. Ceux de 25 sont 1, 5, 25 : ainsi chacun avec leurs parties aliquotes fait 21.

Par le moyen de ces deux derniers quarrés 16, 25, on en peut avoir autant d'autres qu'on voudra qui ayent la même propriété. Il ne faut que les multiplier par quelqu'autre nombre quarré impair qui ne soit pas divisible par 5. Comme si on les multiplie chacun par 9, on aura ces deux autres nombres quarrés 144, 225, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 403 ; ou, ce qui est la même chose, la somme des diviseurs est 403.

## XXII.

Le nombre quarré 81, dont la racine est 9, est tel qu'avec ses parties aliquotes 1, 3, 9, 27, il fait ce nombre quarré 121, dont la racine est 11. Le nombre quarré 400, dont la racine est 20, est aussi tel, qu'avec ses parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, il fait ce nombre quarré 961, dont la racine est 31.

## XXIII.

La somme 666 de ces trois nombres triangulaires 15, 21, 630, dont les côtés sont 5, 6, 35, est aussi un nombre triangulaire dont le côté est 36. Il arrive la même chose à ces trois autres

## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 43.

Les nombres triangulaires 210, 780, 1711, dont les côtés sont 20, 39, 58. Car leur somme 2701 est un nombre triangulaire, dont le côté est 73. La somme 9180 de ces trois autres nombres triangulaires 666, 2628, 5886, dont les côtés sont 36, 72, 108, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 135, &c.

### XXIV.

Le carré 49 du nombre 7, est tel que la somme 8 de ses parties aliquotes 1, 7, a pour racine cubique 2. Et le cube 343 du même nombre 7, est tel qu'avec ses parties aliquotes 1, 7, 49, il fait ce nombre carré 400, dont le côté est 20.

### XXV.

Le carré 9 du nombre 3, est tel que la somme 4 de ses parties aliquotes 1, 3, est un nombre carré, dont le côté est 2. Le carré 2401 du nombre 49, a la même propriété. Car la somme 400 de ses parties aliquotes 1, 7, 49, 343, est un nombre carré dont la racine est 20.

### XXVI.

Les deux nombres 99, 63, sont tels que la somme 57 des parties aliquotes 1, 3, 9, 11, 33, du premier 99, surpasse la somme 41 des parties aliquotes 1, 3, 7, 9, 21, du second 63 de ce nombre carré 16, dont la racine est 4. Il arrive la même chose à ces deux autres nombres 325, 175. Car la somme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13, 25, 65, du premier 325, surpasse la somme 73 des

**44** RECHERCHES. MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.  
parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du second 175,  
de ce nombre carré 36, dont la racine est 6.

## XXVII.

La somme de deux nombres qui diffèrent de l'unité est égale à la différence de leurs carrés : & la somme des carrés de leurs nombres triangulaires est aussi un nombre triangulaire. La somme 11 de ces deux nombres 5, 6, qui diffèrent de l'unité, est égale à la différence de leurs carrés 25, 36 ; & leurs nombres triangulaires 15, 21, sont tels que la somme 666 de leurs carrés 225, 441, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 36.

## XXVIII.

Les deux nombres triangulaires 6, 10, des deux nombres 3, 4, qui diffèrent aussi de l'unité, sont tels que leur somme 16, & leur différence 4, sont des nombres carrés, dont les racines sont 4, 2, & que la somme 136 de leurs carrés 36, 100, est un nombre triangulaire, dont le côté 16, est aussi un nombre carré, dont la racine 4 est encore un nombre carré dont la racine est 2.

Il arrive la même chose à ces deux autres nombres triangulaires 36, 45, dont les côtés 8, 9, diffèrent aussi de l'unité. Car leur somme 81, & leur différence 9, sont des nombres carrés dont les racines sont 9, 3. Et la somme 3321 de leurs carrés 1296, 2025, est un nombre triangulaire dont le côté est 81, qui a pour racine carrée 9, laquelle a aussi sa racine carrée 3.

Il y a une infinité de couples d'autres nombres triangulaires, qui ont la même propriété. On les

trouvera en ôtant & en ajoutant un nombre carré quelconque à son carré, & les moitiés du reste & de la somme feront les deux nombres triangulaires qu'on cherche. Les côtés de ces nombres triangulaires ainsi trouvés, différeront entre eux de l'unité.

Comme si l'on ôte & qu'on ajoute ce nombre carré 16 à son carré 256, les moitiés du reste 240 & de la somme 272, donneront 120, 136, pour les deux nombres triangulaires qu'on cherche, dont les côtés 15, 16, diffèrent de l'unité. Voyez l'article VIII.

Ces deux nombres triangulaires ainsi trouvés, sont encore tels que le plus grand de leurs côtés est toujours un nombre carré : que la différence de leurs carrés est aussi un nombre carré, que leur somme enfin est un carré-carré, qui est égal au carré de leur différence, & au côté du nombre triangulaire que compose la somme de leurs carrés.

Si vous voulez connoître les côtés de ce nombre triangulaire 120, multipliez-le par 8, & au produit ajoutez l'unité, la somme sera 961; tirez en la racine carrée qui sera 31, prenez la plus petite moitié de cette racine 31 qui est 15; ce sera le côté du nombre triangulaire 120. Faites la même chose à l'égard de 136 & de tous les autres nombres triangulaires, dont vous voudrez trouver le côté. Voyez l'article VIII, p. 20.

## XXIX.

La différence des carrés de deux nombres en raison double est égale à la somme de leurs cubes, divisée par la somme des deux nombres, & la

46 RECREAT. MATH. ET PHYS.

même somme des cubes est le tiers d'un cube :

Si on prend les deux nombres 4, 8, qui sont en raison double, la différence 48 de leurs quares 16, 64, est égale au quotient qui vient en divisant la somme 576 de leurs cubes 64, 512, par la somme 12 des deux nombres : & la même somme 576 des cubes est le tiers de ce cube 1728, dont le côté 12 est toujours égal à la somme des deux nombres.

Je n'aurois jamais fait, si je voulois mettre ici toutes les propriétés des nombres, qui sont infinies. C'est pourquoi je finirai ce problème par la table des nombres premiers, que j'ai promise.

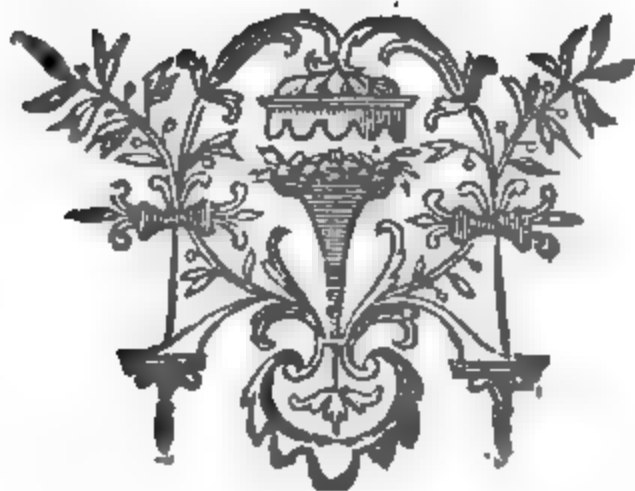


Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

|     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 2   | 167 | 383 | 617 | 881  | 1129 | 1429 | 1693 | 1993 | 2273 | 2557 |
| 3   | 173 | 389 | 619 | 883  | 1151 | 1433 | 1697 | 1997 | 2281 | 2579 |
| 5   | 179 | 397 | 631 | 887  | 1153 | 1439 | 1699 | 1999 | 2287 | 2591 |
| 7   | 181 | 401 | 641 | 907  | 1163 | 1447 | 1709 | 2003 | 2293 | 2593 |
| 11  | 191 | 409 | 643 | 911  | 1171 | 1451 | 1721 | 2011 | 2297 | 2609 |
| 13  | 193 | 419 | 647 | 919  | 1181 | 1453 | 1723 | 2017 | 2309 | 2617 |
| 17  | 197 | 421 | 653 | 929  | 1187 | 1459 | 1733 | 2027 | 2311 | 2621 |
| 19  | 199 | 431 | 659 | 937  | 1193 | 1471 | 1741 | 2029 | 2333 | 2633 |
| 23  | 211 | 433 | 661 | 941  | 1201 | 1481 | 1747 | 2039 | 2339 | 2647 |
| 29  | 223 | 439 | 673 | 947  | 1213 | 1483 | 1753 | 2053 | 2341 | 2657 |
| 31  | 223 | 439 | 677 | 953  | 1217 | 1487 | 1755 | 2063 | 2347 | 2659 |
| 37  | 227 | 443 | 683 | 967  | 1223 | 1489 | 1777 | 2069 | 2351 | 2663 |
| 41  | 229 | 449 | 691 | 971  | 1229 | 1483 | 1783 | 2081 | 2357 | 2671 |
| 43  | 233 | 457 | 701 | 977  | 1231 | 1493 | 1787 | 2083 | 2371 | 2677 |
| 47  | 239 | 461 | 709 | 983  | 1237 | 1511 | 1789 | 2087 | 2377 | 2683 |
| 53  | 241 | 463 | 719 | 991  | 1249 | 1523 | 1801 | 2089 | 2381 | 2687 |
| 59  | 251 | 467 | 727 | 997  | 1259 | 1531 | 1811 | 2099 | 2383 | 2689 |
| 61  | 257 | 479 | 733 | 1009 | 1277 | 1543 | 1823 | 2111 | 2389 | 2693 |
| 67  | 263 | 487 | 739 | 1013 | 1279 | 1549 | 1831 | 2113 | 2393 | 2699 |
| 71  | 269 | 491 | 743 | 1019 | 1283 | 1553 | 1847 | 2129 | 2399 | 2707 |
| 73  | 271 | 499 | 751 | 1021 | 1289 | 1559 | 1861 | 2131 | 2411 | 2711 |
| 79  | 277 | 503 | 757 | 1031 | 1291 | 1567 | 1867 | 2137 | 2417 | 2713 |
| 83  | 281 | 509 | 761 | 1033 | 1297 | 1571 | 1871 | 2141 | 2423 | 2719 |
| 89  | 283 | 521 | 769 | 1039 | 1301 | 1579 | 1873 | 2143 | 2437 | 2729 |
| 97  | 293 | 533 | 773 | 1049 | 1303 | 1583 | 1877 | 2153 | 2441 | 2731 |
| 101 | 307 | 541 | 787 | 1051 | 1307 | 1597 | 1879 | 2161 | 2447 | 2741 |
| 103 | 311 | 547 | 797 | 1061 | 1319 | 1601 | 1888 | 2179 | 2459 | 2749 |
| 107 | 313 | 557 | 811 | 1063 | 1321 | 1607 | 1901 | 2203 | 2467 | 2753 |
| 109 | 317 | 563 | 821 | 1069 | 1327 | 1609 | 1907 | 2207 | 2473 | 2767 |
| 113 | 331 | 569 | 823 | 1087 | 1361 | 1613 | 1913 | 2213 | 2477 | 2777 |
| 127 | 337 | 571 | 827 | 1091 | 1367 | 1619 | 1931 | 2221 | 2503 | 2789 |
| 131 | 347 | 577 | 829 | 1093 | 1373 | 1621 | 1931 | 2221 | 2503 | 2791 |
| 137 | 349 | 587 | 839 | 1097 | 1381 | 1627 | 1933 | 2237 | 2521 | 2797 |
| 139 | 353 | 593 | 853 | 1103 | 1399 | 1637 | 1949 | 2239 | 2531 | 2801 |
| 149 | 359 | 599 | 857 | 1107 | 1409 | 1657 | 1951 | 2243 | 2539 | 2803 |
| 151 | 367 | 601 | 859 | 1117 | 1423 | 1663 | 1957 | 2251 | 2543 | 2807 |
| 157 | 373 | 607 | 863 | 1123 | 1427 | 1669 | 1967 | 2267 | 2549 | 2819 |
| 163 | 379 | 613 | 877 | 1129 | 1429 | 1679 | 1987 | 2269 | 2551 | 2833 |

Table des nombres premiers entre 1 &amp; 10000.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2837 | 3187 | 3491 | 3797 | 4111 | 4451 | 4789 | 5101 | 5449 | 5791 |
| 2843 | 3191 | 3511 | 3803 | 4127 | 4457 | 4793 | 5107 | 5471 | 5801 |
| 2851 | —    | 3517 | 3821 | 4129 | 4463 | 4799 | 5113 | 5477 | 5807 |
| 2857 | 3203 | 3527 | 3823 | 4133 | 4481 | 4801 | 5117 | 5479 | 5813 |
| 2861 | 3209 | 3529 | 3833 | 4139 | 4483 | 4813 | 5147 | 5483 | 5821 |
| 2879 | 3217 | 3533 | 3847 | 4153 | 4493 | 4817 | 5153 | 5501 | 5827 |
| 2887 | 3221 | 3539 | 3851 | 4157 | 4507 | 4831 | 5167 | 5503 | 5839 |
| 2897 | 3229 | 3541 | 3853 | 4159 | 4513 | 4861 | 5171 | 5507 | 5843 |
| 2903 | 3251 | 3547 | 3863 | 4173 | 4517 | 4871 | 5179 | 5519 | 5849 |
| 2909 | 3253 | 3557 | 3877 | 4201 | 4519 | 4877 | 5189 | 5521 | 5851 |
| 2917 | 3257 | 3559 | 3881 | 4211 | 4523 | 4889 | 5197 | 5527 | 5857 |
| 2927 | 3259 | 3571 | 3889 | 4217 | 4547 | 4903 | 5209 | 5531 | 5861 |
| 2939 | 3271 | 3581 | 3907 | 4219 | 4549 | 4909 | 5227 | 5557 | 5867 |
| 2953 | 3299 | 3583 | 3911 | 4229 | 4561 | 4919 | 5231 | 5563 | 5869 |
| 2957 | 3301 | 3593 | 3917 | 4231 | 4567 | 4931 | 5233 | 5569 | 5879 |
| 2963 | 3307 | 3607 | 3919 | 4241 | 4583 | 4933 | 5237 | 5573 | 5881 |
| 2969 | 3313 | 3613 | 3923 | 4243 | 4591 | 4937 | 5261 | 5581 | 5897 |
| 2971 | 3319 | 3617 | 3929 | 4253 | 4597 | 4943 | 5273 | 5591 | 5903 |
| 2999 | 3323 | 3623 | 3931 | 4259 | 4603 | 4951 | 5279 | 5623 | 5923 |
| 3001 | 3329 | 3631 | 3943 | 4261 | 4621 | 4957 | 5281 | 5635 | 5927 |
| 3011 | 3331 | 3637 | 3947 | 4271 | 4637 | 4967 | 5297 | 5641 | 5939 |
| 3019 | 3341 | 3643 | 3967 | 4273 | 4639 | 4969 | 5303 | 5647 | 5953 |
| 3023 | 3347 | 3659 | 3989 | 4283 | 4643 | 4973 | 5309 | 5651 | 5981 |
| 3037 | 3359 | 3671 | 4001 | 4289 | 4649 | 4987 | 5323 | 5653 | 5987 |
| 3041 | 3361 | 3673 | 4003 | 4297 | 4651 | 4993 | 5333 | 5657 | 6007 |
| 3049 | 3371 | 3677 | 4007 | 4327 | 4657 | 4999 | 5347 | 5659 | 6011 |
| 3061 | 3373 | 3691 | 4013 | 4337 | 4663 | —    | 5351 | 5669 | 6029 |
| 3067 | 3389 | 3697 | 4019 | 4339 | 4673 | 5003 | 5381 | 5683 | 6037 |
| 3079 | 3391 | 3701 | 4021 | 4349 | 4679 | 5011 | 5387 | 5689 | 6043 |
| 3083 | 3407 | 3709 | 4027 | 4357 | 4691 | 5021 | 5393 | 5693 | 6047 |
| 3089 | 3413 | 3719 | 4039 | 4363 | 4703 | 5023 | 5399 | 5701 | 6053 |
| 3109 | 3433 | 3727 | 4051 | 4373 | 4721 | 5039 | 5407 | 5711 | 6067 |
| 3119 | 3449 | 3733 | 4057 | 4391 | 4723 | 5051 | 5413 | 5717 | 6073 |
| 3121 | 3457 | 3739 | 4073 | 4397 | 4729 | 5059 | 5417 | 5737 | 6079 |
| 3137 | 3461 | 3761 | 4079 | 4409 | 4733 | 5077 | 5419 | 5741 | 6089 |
| 3161 | 3463 | 3767 | 4091 | 4421 | 4751 | 5081 | 5431 | 5743 | 6091 |
| 3167 | 3467 | 3769 | 4093 | 4423 | 4759 | 5087 | 5437 | 5749 | —    |
| 3169 | 3469 | 3779 | 4099 | 4441 | 4773 | 5099 | 5441 | 5779 | 6101 |
| 3181 | 3491 | 3793 | —    | 4447 | 4787 | —    | 5443 | 5783 | 6113 |

Table



Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 6121 | 6449 | 6803 | 7151 | 7523 | 7853 | 8219 | 8581 | 8893 | 9241 |
| 6131 | 6451 | 6823 | 7159 | 7529 | 7867 | 8221 | 8597 | 8923 | 9257 |
| 6133 | 6461 | 6827 | 7177 | 7537 | 7873 | 8231 | 8599 | 8929 | 9277 |
| 6143 | 6473 | 6829 | 7187 | 7541 | 7877 | 8233 | 8609 | 8933 | 9281 |
| 6151 | 6481 | 6833 | 7193 | 7547 | 7879 | 8237 | 8623 | 8941 | 9283 |
| 6163 | 6491 | 6841 | 7207 | 7549 | 7883 | 8243 | 8627 | 8951 | 9293 |
| 6173 | 6521 | 6857 | 7211 | 7559 | 7901 | 8263 | 8629 | 8963 | 9311 |
| 6197 | 6529 | 6863 | 7213 | 7561 | 7907 | 8269 | 8641 | 8969 | 9319 |
| 6199 | 6547 | 6869 | 7219 | 7573 | 7917 | 8273 | 8647 | 8971 | 9323 |
| 6203 | 6551 | 6871 | 7229 | 7577 | 7927 | 8287 | 8663 | 8999 | 9337 |
| 6211 | 6553 | 6883 | 7237 | 7583 | 7933 | 8291 | 8669 | 9001 | 9341 |
| 6217 | 6563 | 6899 | 7243 | 7589 | 7937 | 8293 | 8677 | 9007 | 9343 |
| 6221 | 6569 | 6907 | 7247 | 7591 | 7949 | 8297 | 8681 | 9011 | 9349 |
| 6229 | 6571 | 6911 | 7253 | 7603 | 7951 | 8311 | 8689 | 9013 | 9371 |
| 6247 | 6577 | 6917 | 7283 | 7607 | 7963 | 8317 | 8693 | 9029 | 9377 |
| 6257 | 6581 | 6947 | 7297 | 7621 | 7993 | 8329 | 8699 | 9041 | 9391 |
| 6263 | 6599 | 6941 | 7307 | 7639 | 8009 | 8353 | 8707 | 9043 | 9397 |
| 6269 | 6607 | 6959 | 7309 | 7643 | 8011 | 8363 | 8713 | 9049 | 9403 |
| 6271 | 6619 | 6961 | 7321 | 7649 | 8017 | 8369 | 8719 | 9059 | 9413 |
| 6277 | 6637 | 6967 | 7331 | 7669 | 8039 | 8377 | 8731 | 9067 | 9419 |
| 6287 | 6653 | 6971 | 7333 | 7673 | 8053 | 8387 | 8737 | 9091 | 9421 |
| 6299 | 6659 | 6977 | 7349 | 7681 | 8059 | 8389 | 8741 | 9103 | 9431 |
| 6301 | 6661 | 6983 | 7351 | 7687 | 8069 | 8419 | 8747 | 9109 | 9433 |
| 6311 | 6673 | 6991 | 7369 | 7691 | 8081 | 8423 | 8753 | 9127 | 9437 |
| 6317 | 6679 | 6997 | 7393 | 7699 | 8087 | 8429 | 8761 | 9133 | 9439 |
| 6323 | 6689 | 7001 | 7411 | 7703 | 8089 | 8431 | 8779 | 9137 | 9461 |
| 6329 | 6691 | 7013 | 7417 | 7723 | 8101 | 8443 | 8783 | 9151 | 9463 |
| 6337 | 6701 | 7019 | 7433 | 7727 | 8107 | 8461 | 8803 | 9157 | 9467 |
| 6343 | 6703 | 7027 | 7451 | 7741 | 8111 | 8467 | 8807 | 9161 | 9473 |
| 6352 | 6709 | 7039 | 7457 | 7753 | 8117 | 8501 | 8819 | 9173 | 9479 |
| 6359 | 6719 | 7043 | 7459 | 7757 | 8123 | 8513 | 8831 | 9181 | 9491 |
| 6366 | 6733 | 7057 | 7477 | 7759 | 8147 | 8521 | 8837 | 9187 | 9497 |
| 6367 | 6737 | 7069 | 7481 | 7789 | 8161 | 8527 | 8839 | 9199 | 9511 |
| 6373 | 6761 | 7079 | 7487 | 7793 | 8167 | 8537 | 8849 | 9203 | 9521 |
| 6379 | 6763 | 7103 | 7489 | 7817 | 8171 | 8539 | 8861 | 9209 | 9533 |
| 6389 | 6779 | 7109 | 7499 | 7823 | 8179 | 8543 | 8863 | 9221 | 9539 |
| 6397 | 6781 | 7121 | 7507 | 7829 | 8191 | 8563 | 8867 | 9227 | 9547 |
| 6421 | 6791 | 7127 | 7517 | 7841 | 8209 | 8573 | 8887 | 9239 | 9551 |
| 6427 | 6793 | 7129 | 7519 | 7843 | 8211 | 8575 | 8889 | 9241 | 9553 |

## Table des nombres premiers entre 1 &amp; 10000.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 9587 | 9629 | 9679 | 9733 | 9781 | 9817 | 9859 | 9907 | 9967 |
| —    | 9631 | 9689 | 9739 | 9787 | 9829 | 9871 | 9923 | 9973 |
| 9601 | 9643 | 9697 | 9743 | 9791 | 9833 | 9883 | 9929 | —    |
| 9613 | 9649 | —    | 9749 | —    | 9839 | 9887 | 9931 | —    |
| 9619 | 9661 | 9719 | 9767 | 9803 | 9851 | —    | 9941 | —    |
| 9623 | 9677 | 9721 | 9769 | 9811 | 9857 | 9901 | 9949 | —    |

## PROBLEME IX.

## Des triangles rectangles en nombres.

**O**N appelle *triangle rectangle en nombres*, trois nombres inégaux, dont le plus grand est tel, que son quarré est égal à la somme des quarrés des deux autres, comme 3, 4, 5. Car le quarré 25 du plus grand 5, qu'on appelle *hypotenuse*, est égal à la somme des quarrés 9, 16, des deux autres 3, 4, qu'on appelle *côtés*, dont l'un étant pris pour la *base* du triangle rectangle, l'autre en sera la *hauteur*. La moitié 6 du produit 12 sous cette base & cette hauteur, se nomme *aire*, qui est toujours divisible par 3. Vous remarquerez que par le produit des deux nombres, nous entendons celui qui vient de leur multiplication.

Il y a une infinité de triangles rectangles de diverses especes, tant en nombres entiers qu'en nombres rompus : mais on les conçoit ordinairement en nombres entiers, entre lesquels le premier & le plus petit de tous est le précédent 3, 4, 5 : il a une infinité de belles propriétés, qu'il seroit trop long de rapporter ici. Je me contenterai de dire que la somme 216 des cubes 27, 64, 125, de ses deux côtés 3, 4, & de son hypotenuse 5, est un cube dont le côté 6 est égal à son aire,

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE § 1

*Pour trouver en nombres autant de triangles rectangles qu'on voudra, prenez à volonté deux nombres, comme 2, 3, qu'on appelle nombres générateurs; & multipliez-les ensemble, pour avoir leur produit 6, dont le double 12 sera le côté d'un triangle rectangle; l'autre côté sera égal à la différence 5 des quarrés 4, 9; des nombres générateurs 2, 3; & l'hypoténuse sera égale à la somme 13 des mêmes quarrés 4, 9. De sorte qu'on aura ce triangle rectangle 5, 12, 13: car le quarré 169 de l'hypoténuse 13 est égal à la somme des quarrés 25, 144, dont les racines sont 5, 12.*

Le premier triangle rectangle 3, 4, 5, dont les deux nombres générateurs sont 1, 2, est tel, que la différence des deux côtés 3, 4, est 1. Si vous voulez en trouver un autre qui ait la même propriété, prenez pour le plus petit nombre générateur de ce second triangle, le nombre 2, qui est le plus grand nombre générateur du premier. Doublez ce nombre 2; ajoutez à 4 double de 2, 1; le plus petit nombre générateur du premier, & vous aurez 5, qui sera le plus grand nombre générateur du second triangle cherché, que vous trouverez en suivant la regle qu'on vient de donner. Ces trois nombres seront 20, 21, 29, dont les deux côtés 20, 21, ne different que de l'unité.

Si vous voulez un troisieme triangle rectangle qui ait la même propriété, servez vous des deux nombres générateurs 2, 5, du triangle précédent, & prenez le plus grand 5 pour le plus petit du troisieme triangle rectangle. Doublez ce nombre 5, ajoutez à 10 double de 5, 2, le plus petit nombre générateur du triangle précédent, & vous aurez 12 pour le plus grand nombre générateur du troisieme triangle rectangle, qui sera 119, 120,

52 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

169 , où la différence des deux côtés 119, 120, est aussi 1. Vous suivrez la même règle pour trouver les autres. La table que l'on a jointe ici servira à faire connoître les six premiers triangles , dont les côtés ne different que de l'unité : on peut la continuer aussi loin que l'on voudra , en suivant les exemples qu'on vient de donner.

| <i>Cotés.</i> | <i>Hypotén.</i> | <i>Nombr. génér.</i> |     |      |
|---------------|-----------------|----------------------|-----|------|
| 3.            | 4.              | 5.                   | 1.  | 2.   |
| 20.           | 21.             | 29.                  | 2.  | 5.   |
| 119.          | 120.            | 169.                 | 5.  | 12.  |
| 696.          | 697.            | 985.                 | 12. | 29.  |
| 4059.         | 4060.           | 5741.                | 29. | 70.  |
| 23660.        | 23661.          | 33461.               | 70. | 169. |

Le même premier triangle rectangle 3 , 4 , 5 , est encore tel , que l'excès de l'hypoténuse 5 sur le côté 4 est aussi 1 , parce que ses deux nombres générateurs 1 , 2 , different de l'unité.

*Bases. Hauteurs. Hypotén. Nombr. génér.*

|     |     |     |    |    |
|-----|-----|-----|----|----|
| 3.  | 4.  | 5.  | 1. | 2. |
| 5.  | 12. | 13. | 2. | 3. |
| 7.  | 24. | 25. | 3. | 4. |
| 9.  | 40. | 41. | 4. | 5. |
| 11. | 60. | 61. | 5. | 6. |
| 13. | 84. | 85. | 6. | 7. |

C'est pourquoi on pourra trouver une infinité d'autres triangles rectangles , qui auront la même propriété , si pour leurs nombres générateurs on prend deux nombres qui different de l'unité , comme vous voyez dans la table précédente , où les premières différentes des bases 3 , 5 , 7 , 9 , &c sont égales , & où les secondes différences des hau

# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. §§

teurs 4, 12, 24, 40, &c. sont aussi égales; ce qui arrive aussi aux hypoténuses 5, 13, 25, 41, &c.

## REMARQUES.

Les secondes différences des hauteurs sont égales; car la différence de 12 à 4 est 8, & la différence de 24 à 12 est 12: mais la différence de 12 à 8 est 4. De même la différence de 40 à 24 est 16, & la différence de 16 à 12 est aussi 4. Ainsi des autres.

*Hauteurs. 1<sup>re</sup> Diff. 2<sup>re</sup> Diff.*

|    |   |    |   |   |
|----|---|----|---|---|
| 12 | } | 8  | } |   |
| 4  | } |    | } | 4 |
| 24 | } | 12 | } |   |
| 12 | } |    | } | 4 |
| 40 | } | 16 | } |   |
| 24 | } |    | } | 4 |

Les hypoténuses ont aussi les secondes différences égales, comme on le voit par cette table.

*Hypotén. 1<sup>re</sup> Diff. 2<sup>re</sup> Diff.*

|    |   |    |   |   |
|----|---|----|---|---|
| 13 | } | 8  | } |   |
| 5  | } |    | } | 4 |
| 25 | } | 12 | } |   |
| 13 | } |    | } | 4 |
| 41 | } | 16 | } |   |
| 25 | } |    | } | 4 |

Les bases sont ici des nombres impairs; & si l'on veut qu'elles soient les quarrés de ces mêmes nombres impairs, il ne faut que prendre les hauteurs & les hypoténuses pour les nombres géné-

34 RECREAT. MATHÉMAT. ET PHYS.  
 rateurs des triangles rectangles qu'on cherche,  
 lesquels par conséquent seront tels.

*Bases. Hauteurs. Hypotén. Nomb. génér.*

|      |        |        |     |     |
|------|--------|--------|-----|-----|
| 9.   | 40.    | 41.    | 4.  | 5.  |
| 25.  | 312.   | 313.   | 12. | 13. |
| 49.  | 1200.  | 1201.  | 24. | 25. |
| 81.  | 3280.  | 3281.  | 40. | 41. |
| 121. | 7320.  | 7321.  | 60. | 61. |
| 169. | 14280. | 14281. | 84. | 85. |

Si au lieu d'un côté, vous voulez que l'hypoténuse soit un nombre quarré, il faut que les deux nombres générateurs soient les côtés d'un triangle rectangle, comme vous voyez ici, où l'hypoténuse est le quarré du plus grand nombre générateur augmenté de l'unité.

*Côtés. Hypotén. Nomb. génér.*

|       |       |       |     |     |
|-------|-------|-------|-----|-----|
| 7.    | 24.   | 25.   | 3.  | 4.  |
| 119.  | 120.  | 169.  | 5.  | 12. |
| 336.  | 527.  | 625.  | 7.  | 24. |
| 720.  | 1519. | 1681. | 9.  | 40. |
| 1320. | 3479. | 3721. | 11. | 60. |
| 2184. | 6887. | 7225. | 13. | 84. |

Ce triangle rectangle 21, 28, 35, est tel que les deux côtés 21, 28, sont des nombres triangulaires, dont les côtés 6, 7, different de l'unité, & le quarré 12:5 de l'hypoténuse 34 est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 49.

Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle 820, 861, 1189. Car les deux côtés 820,

# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 55

861, sont des nombres triangulaires dont les côtés 40, 41 différent aussi de l'unité, & le carré 1413721 de l'hypoténuse 1189 est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 1681.

Il arrive encore la même chose à ce troisième triangle rectangle 28441, 28680, 40391. Car les deux côtés 28441, 28680, sont des nombres triangulaires, dont les côtés 238, 239, différent aussi de l'unité, & le carré 1631432881 de l'hypoténuse 40391, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 57121. Ainsi des autres.

Les triangles rectangles suivans ont pour bases & pour hypoténuses des nombres triangulaires, &

*Bases. Hauteurs. Hypotén. Nombr. génér.*

|       |      |       |     |     |
|-------|------|-------|-----|-----|
| 6.    | 8.   | 10.   | 1.  | 3.  |
| 36.   | 27.  | 45.   | 3.  | 6.  |
| 120.  | 64.  | 136.  | 6.  | 10. |
| 300.  | 125. | 325.  | 10. | 15. |
| 630.  | 216. | 666.  | 15. | 21. |
| 1176. | 343. | 1225. | 21. | 28. |

pour hauteur des nombres cubiques. On en trouvera autant que l'on voudra, en ajoutant & en ôtant un nombre carré de son carré; car la moitié de la somme sera l'hypoténuse, la moitié du reste sera la base, & la hauteur sera égale au cube du côté du premier nombre carré: ou bien en prenant pour nombres générateurs les nombres triangulaires par ordre, comme vous voyez ici, où le plus petit nombre générateur d'un triangle rectangle est le même que le plus grand du triangle rectangle précédent, &c.

Div

## PROBLÈME X.

*De la progression arithmétique.*

**O**N appelle *progression arithmétique*, une suite de grandeurs, dont la différence est la même à l'égard de celles qui se suivent immédiatement. Cette suite peut aller en augmentant ou en diminuant. Ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. forment une progression arithmétique, dont la différence ou l'excès est 2. Cette autre suite de nombres 2, 6, 10, 14, 18, 22, &c. est une autre progression arithmétique, dont la différence est 4. Ces deux progressions vont en augmentant. Celle-ci 32, 27, 22, 17, 12, 7, &c. va en diminuant, & sa différence est 5. Chaque grandeur de la progression est appelée *terme*.

La principale propriété de la progression arithmétique, est que si on prend trois termes de suite, 6, 10, 14, la somme 20, des deux extrêmes 6, 14 est double du moyen 10. De même si on prend quatre termes de suite 6, 10, 14, 18, la somme 24 des deux extrêmes 6, 18, est égale à celle des deux moyens 10, 14. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes de suite, comme ces six, 2, 6, 10, 14, 18, 22, la somme 24 des deux extrêmes 2, 22, est encore égale à celle des deux autres 6, 18, qui en sont également éloignés, & à celle des deux 10, 14, qui en sont aussi également éloignés. D'où il est aisé de conclure que quand le nombre des termes est impair, la somme de deux termes également éloignés du moyen, est double de ce terme moyen, comme on le voit dans les cinq termes 2, 6, 10, 14, 18. Car la somme 20 des deux extrêmes 2, 18, ou de ces deux autres 6, 14, qui



## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

57

sont également éloignés du moyen 10, aussi bien que des extrêmes, est double de ce moyen 10.

On peut aisément trouver autant qu'on voudra de triangles rectangles en nombres, par le moyen de cette double progression arithmétique  $1\frac{1}{3}$ ,  $2\frac{2}{3}$ ,  $3\frac{3}{7}$ ,  $4\frac{4}{9}$ ,  $5\frac{5}{11}$ ,  $6\frac{6}{13}$ ,  $7\frac{7}{15}$ ,  $8\frac{8}{17}$ , &c. où l'excès est 2 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car si l'on réduit l'entier avec sa fraction en une seule fraction, comme  $1\frac{1}{3}$  en  $\frac{4}{3}$ , \* le numérateur 4, & le dénominateur 3, seront les côtés de ce triangle rectangle 3, 4, 5, dont on connoîtra l'hypoténuse 5, en prenant la racine quarrée de 25, somme des quarrés 9, 16 des côtés 3, 4. De même si l'on réduit  $2\frac{2}{3}$  en  $\frac{12}{3}$ , \* le dénominateur 3 & le numérateur 12, seront les côtés de ce triangle rectangle 5, 12, 13. Ainsi des autres, où vous voyez que tout nombre impair peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle, en nombres entiers.

Au lieu de cette double progression arithmétique, on peut se servir de celle-ci,  $1\frac{7}{8}$ ,  $2\frac{11}{12}$ ,  $3\frac{15}{16}$ ,  $4\frac{19}{20}$ ,  $5\frac{23}{24}$ ,  $6\frac{27}{28}$ ,  $7\frac{31}{32}$ ,  $8\frac{35}{36}$ , &c. où l'excès est 4 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car si l'on réduit  $1\frac{7}{8}$  en  $\frac{15}{8}$ , \* le dénominateur 8, & le numérateur 15, seront les deux côtés de ce triangle rectangle 8, 15, 17. De même si l'on réduit  $2\frac{11}{12}$  en  $\frac{35}{12}$ , \* le dénominateur 12, & le numérateur 35, seront les deux côtés de cet autre triangle rectangle 12, 35, 37. Ainsi des autres, où vous voyez qu'un nombre divisible par 4 peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle en nombres entiers.

\* Ce qui se fait en multipliant le nombre entier par le dénominateur, & ajoutant au produit le numérateur.

*Pour trouver une infinité de semblables progressions, on prendra à volonté deux nombres quelconques, comme 1, 2, ou 3, 5, qui sont les termes générateurs des deux progressions précédentes, ou tels autres nombres qu'il plaira.*

Premièrement, on aura le numérateur de la première fraction en multipliant ces termes l'un par l'autre : si le produit est impair, il sera le numérateur cherché ; mais s'il est pair, il faudra prendre le double de ce produit.

Secondement, on aura le dénominateur de cette première fraction ; en ajoutant les deux termes choisis, & en multipliant cette somme par la différence de ces mêmes termes : si le produit est impair, il sera le dénominateur cherché ; mais s'il est pair, on en prendra la moitié.

Troisièmement, on aura le numérateur de la fraction suivante : 1°. En multipliant la différence des termes par 2, si elle est paire, ou par 4, si elle est impaire. 2°. En multipliant ce produit par le plus grand terme choisi. 3°. En ajoutant ce second produit au numérateur de la première fraction ; cette somme formera le numérateur de la seconde fraction.

Enfin on aura le dénominateur de cette seconde fraction, en ajoutant le carré de la différence des termes choisis, s'il est pair, ou le double de ce carré, s'il est impair, au dénominateur de la première fraction. Cette somme donnera le dénominateur de la seconde fraction.

Les deux premiers termes de cette progression étant réduits en entiers & en fractions, il sera aisé de trouver la suite d'autant de termes qu'on voudra ; puisqu'on connoît la différence des entiers, celle des numérateurs & celle des dénominateurs.

## I.

Dans une progression arithmétique, la somme des termes est égale à la somme des deux extrêmes, multipliée par la moitié du nombre de tous ces termes. C'est pourquoi pour trouver la somme d'autant de termes qu'on voudra d'une progression arithmétique, par exemple, de ces huit, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, on multipliera par leur nombre 8, la somme 20 des deux extrêmes 3, 17, & 80, moitié du produit 160, sera la somme qu'on cherche.

## I I.

Si au contraire on connoît la somme des termes, leur nombre & le premier terme, on trouvera chacun de ces termes, en cherchant leur excès en cette sorte. Si la somme donnée des termes est par exemple 80, que leur nombre soit 8, & que le premier terme soit 3, divisez par le nombre donné des termes 8 le double 160 de la somme donnée 80; ôtez du quotient 20 le double 6 du premier terme donné 3; enfin divisez le reste 14 par le nombre donné des termes diminués de l'unité; c'est à dire, dans cet exemple, par 7; le quotient 2 sera l'excès qu'on cherche, lequel étant ajouté au premier terme donné 3, donnera 5 pour le second terme, auquel si l'on ajoute le même excès 2, on aura 7 pour le troisième terme, & ainsi de suite.

## I I I.

Mais si l'on donne la somme des termes, leur nombre & l'excès, on trouvera le premier terme,

## 80 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

& par conséquent tous les autres en cette sorte. Que la somme donnée des termes soit 80, que leur nombre soit 8, & que l'excès soit 2; divisez le double 160 de la somme donnée 80 par le nombre donné des termes 8; ôtez du quotient 20, autant de fois l'excès 2, que le nombre donné des termes 8 comprend d'unités moins une; scavoir, 7 fois, c'est-à-dire, qu'il faut ici ôter 14; la moitié 3 du reste 6, sera le premier terme, auquel ajoutant l'excès donné 2, on aura 5 pour le second terme: si l'on ajoute à ce second terme le même excès 2, on aura 7 pour le troisième terme, & ainsi de suite.

### IV.

Si on connoît le premier terme, le nombre & la différence des termes, on connoîtra le dernier terme en cette sorte. Multipliez le nombre des termes diminué de l'unité par la différence, ajoutez à ce produit le premier terme, la somme donnera le dernier terme. Soit le premier terme 3, le nombre des termes 8, & leur différence 2, multipliez 7, nombre des termes diminué de l'unité, par 2, différence des termes, ajoutez au produit 14 le premier terme 3, & vous aurez 17 pour le dernier terme. Nous ferons l'application de ces articles dans les questions suivantes.

### QUESTION. I.

*Un propriétaire fait faire un puits à un maçon avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la première toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisième, & ainsi de suite en augmentant de 2 livres à chaque toise, jusqu'à 20 toises*

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 61**

*de profondeur. On demande combien il sera dû au maçon, quand les 20 toises de profondeur seront achevées.*

**P**our résoudre cette question, multipliez les deux livres d'augmentation pour chaque toise de profondeur par le nombre des toises moins une de toute la profondeur, c'est-à-dire, par 19, & ayant ajouté au produit 28 le premier terme 3, vous aurez 41 pour le dernier terme. Ajoutez à ce dernier terme 41 le premier terme 3, qui est le nombre des livres promises pour la première toise; multipliez la somme 44 par la moitié 10 du nombre 20 des toises de toute la profondeur, & vous aurez 440 livres pour l'argent dû au maçon sur 20 toises de profondeur,

**R E M A R Q U E.**

Cette question se résout par le quatrième & le premier article; par le quatrième article on trouve le dernier terme 41, & par le premier on trouve 440 livres, somme des 20 termes.

**Q U E S T I O N II.**

*Un voyageur a fait 100 lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait deux lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.*

**P**our résoudre cette question, divisez le double 200 des lieues données 100; par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le

dans ces sortes de questions, il faut doubler le nombre des lieues données, où la progression ne se rencontre point, ajouter à ce double la différence ou l'excès de la progression arithmétique, ôter de cette somme le double du premier terme de cette progression, & diviser ce reste par la différence des termes de la progression : le quotient sera le nombre des termes, qui étant multiplié par le nombre des lieues qui n'est point dans la progression, donnera la somme de tous les termes.

### Q U E S T I O N V.

*On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues ; que deux couriers sont partis en même tems, & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent : & que précisément au milieu du chemin ils se sont rencontrés ; le premier au bout de 5 jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux couriers ont fait chaque jour.*

**P**our sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 5 jours, ôtez ce nombre 5 de son carré 25, & ayant multiplié le reste 20 par 2, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour plus que le précédent, ôtez le produit 40 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon : puis divisez le reste 60 par 10, double de 5, nombre des jours : le quotient 6 fera connoître que le courrier a fait 6 lieues le premier jour, & par conséquent 8 le second

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 65

cond, 10 le troisieme, 12 le quatrieme, & 14 le cinquieme.

De même pour sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 4 jours, ôtez ce nombre 4 de son carré 16, & ayant multiplié le reste 12 par 3, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour de plus, ôtez le produit 36 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon, puis divisez le reste 64, par 8, double de 4, nombre des jours, & le quotient 8 fera connoître que ce courier a fait 8 lieues le premier jour, & par conséquent 11 le second, 14 le troisieme, & 17 le quatrieme.

R E M A R Q U E.

Cette cinquieme question comprend deux parties, qui peuvent fort bien se résoudre chacune par le troisieme article précédent, si l'on fait attention que 50, moitié de 100, est la somme des termes.

Q U E S T I O N V I.

*Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place.*

**I**L est certain que pour la premiere pomme il faut faire deux pas, un pour aller & un pour revenir : que pour la seconde pomme il faut faire 4 pas, deux pour aller & deux pour revenir : que pour la troisieme pomme il faut faire 6 pas, trois pour aller & trois pour revenir : & ainsi du reste.

## 66 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

On a cette progression arithmétique 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , &c. dont le dernier & plus grand terme sera 200 , qui est le double du nombre des pommes , auquel ajoutant le premier terme 2 , & multipliant la somme 202 , par la moitié 50 du nombre des pommes , qui est le nombre des termes , le produit 10100 sera la somme de tous ces termes , ou le nombre des pas qu'on cherche.

### REMARQUE.

Cette fixieme question se résout par le quatrieme article , pour avoir le dernier terme 202 , & par le premier , pour avoir la somme des termes 10100.

## QUESTION VII.

*Un marchand est convenu avec un de ses créanciers de lui donner de l'argent chaque semaine ; la premiere semaine il lui a donné cent livres , la seconde quatre cent livres , il a augmenté chaque semaine son paiement de trois cents livres. On demande combien il a payé la vingt-huitieme semaine.*

**P**OUR résoudre cette question , il faut multiplier 300 livres , différence de la progression , par 27 , nombre des semaines diminuées de l'unité , & ajouter 100 livres , premier terme , au produit 8100. La somme 8200 livres sera le paiement que le marchand aura fait la vingt-huitieme semaine.

### REMARQUE.

La solution de cette septieme question n'est que l'application du quatrieme article. On peut s'exercer à chercher par le premier article quelle peut



être la somme qu'a payé le marchand pendant les vingt-huit semaines. Voyez Schooten dans ses *sectiones miscellaneæ*.

## QUESTION VIII.

*Un réservoir a douze canaux : par le second il s'écoule dans une heure deux pintes d'eau plus que par le premier : par le troisième deux pintes plus que par le second , & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une heure.*

**I**L faut diviser 168, somme de la progression, par 6, moitié de 12, nombre des canaux ou des termes : du quotient 28 on ôtera 22, produit de 2, différence, par 11, nombre des termes diminués de l'unité, il restera 6, dont la moitié 3 est le premier terme de la progression, c'est-à-dire que le premier canal laissera écouler 3 pintes d'eau dans une heure, le second 5 pintes pendant le même tems, le troisième 7 pintes, &c.

## REMARQUE.

Cette huitième question étant assez composée ; ne peut se rapporter précisément à aucun des quatre articles précédens : mais elle peut servir de règle pour résoudre toutes les questions qui lui sont semblables.

## QUESTION IX.

*Un pere de famille ordonne par son testament , que*

*l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens dix milles livres, & le septieme de ce qui restera; que le second prendra vingt mille livres, & le septieme de ce qui restera; que le troisieme prendra trente mille livres, & le septieme de ce qui restera, & ainsi de suite, en augmentant toujours de dix milles livres avec le septieme du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.*

**P**our résoudre cette neuvieme question, & les autres qui lui sont semblables, il faut ôter 1 du dénominateur de la fraction, qui est ici 7; le reste 6 sera le nombre des enfans. Il faut ensuite quar- rer ce reste 6, & multiplier son quarré 36 par la somme que doit prendre l'aîné des enfans, & qu'on a supposé ici être 10000 livres; le produit 360000 est le bien à partager. Divisant ce produit par 6, nombre des enfans, on trouve 60000 liv. qui est la somme que chacun des enfans a pris.

### REMARQUE.

Si on veut se servir de l'algebre pour résoudre ces sortes de questions, on peut consulter les nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, par M. de Lagny, de l'académie royale des sciences, pag. 417.

### PROBLEME XI.

*De la progression géométrique.*

**O**N appelle *progression géométrique* une suite de plusieurs quantités qui croissent continuellement par la multiplication d'un même nombre,

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 69**

comme 3, 6, 12, 24, 48, 96, &c. où chaque terme est double du précédent : ou bien 2, 6, 18, 54, 162, 486, &c. où chaque terme est triple du précédent. Ainsi des autres.

**I.**

La principale propriété de la progression géométrique est que, si on prend trois termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, le produit 36 des deux extrêmes 3, 12, est égal au carré du moyen 6. De même si on prend quatre termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, 24, le produit 72 des deux extrêmes 3, 24, est égal au produit des deux moyens, 6, 12. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes continuellement proportionnels, comme ces six, 3, 6, 12, 24, 48, 96, le produit 288 des deux extrêmes 3, 96, est égal au produit des deux 6, 48, qui en sont également éloignés, ou des deux 12, 24, qui en sont aussi également éloignés. D'où il est aisé de conclure que, lorsque le nombre des termes est impair, ce produit est égal au carré du terme moyen, comme il arrive dans ces cinq termes 3, 6, 12, 24, 48. Car le produit 144 des deux extrêmes 3, 48, ou des deux 6, 24, qui en sont également éloignés, est le carré du terme moyen 12.

Ainsi vous voyez que ce qui convient à la progression arithmétique par addition, convient à la progression géométrique par multiplication. Mais il y a une autre différence considérable entre ces deux progressions ; c'est que dans la progression arithmétique les différences des termes sont égales, au lieu que dans la progression géométrique elles sont toujours inégales ; elles conservent entre elles la même progression géométrique ; & quoi-

qu'on prenne à l'infini les différences des différences, on ne peut jamais parvenir à des différences égales. Ainsi l'on voit que dans cette progression géométrique 2, 6, 18, 54, 162, 486, les différences des termes font cette semblable progression géométrique 4, 12, 36, 108, 324, ou les différences des termes font aussi cette semblable progression géométrique 8, 24, 72, 216, & ainsi de suite.

Si on prend trois termes proportionnels, comme 2, 6, 18, le cube 216, du moyen 6, est égal au produit solide qui vient de la multiplication des trois nombres 2, 6, 18. De même si on prend quatre nombres continuellement proportionnels, comme 2, 6, 18, 54, le cube 216 du second 6 est égal au produit solide qu'on a en multipliant le quatrième 54 par 4, carré du premier 2; & le cube 5832 du troisième 18, est égal au produit solide qui vient en multipliant le premier 2 par 2916, carré du quatrième 54.

## II.

On connoît aisément, par ce qui a été dit jusqu'à présent, que *pour trouver un moyen géométrique proportionnel entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 18, il faut multiplier ensemble les deux nombres donnés 2, 18, & prendre la racine carrée 6 de leur produit 36, qui sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens géométriques continuellement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 54, il faut multiplier le dernier 54 par 4, carré du premier 2, & la racine cubique 6 du produit 216 sera le premier moyen proportionnel; lequel étant multiplié par 54, second

# PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE. 72

nombre donné , donnera pour produit 324 , dont la racine quarrée 18 , sera l'autre moyen proportionnel qu'on cherche.

## III.

Mais pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés , comme entre 2 & 8 , il faut prendre 5 , moitié de 10 , somme des nombres donnés , 2 , 8 . Cette moitié 5 sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et pour trouver deux moyens arithmétiques continuellement proportionnels entre deux nombres donnés , comme entre 2 & 11 , on ôtera 2 , le plus petit nombre donné , du plus grand 11 ; on ajoutera séparément au même plus petit 2 , le tiers 3 du reste 9 , & 6 double de ce tiers , & l'on aura 5 & 8 , pour les deux moyens proportionnels qu'on cherche.

Ou bien on ajoutera au plus grand 11 des deux nombres donnés , le double 4 du plus petit 2 , & réciproquement au plus petit 2 , le double 22 du plus grand 11 , & les tiers des deux sommes 15 , 24 , donneront 5 & 8 pour les deux moyens qu'on cherche.

## IV.

Il est évident que toutes les puissances par ordre d'un même nombre , comme de 2 , font une progression géométrique , telle qu'est la suivante ,

|       |   |       |     |       |    |     |     |     |
|-------|---|-------|-----|-------|----|-----|-----|-----|
| 1     | 2 | 4     | 8   |       |    |     |     |     |
| 2     | 4 | 8     | 16  | 32    | 64 | 128 | 256 | &c. |
| 1     | 1 | 1     | 1   |       |    |     |     |     |
| <hr/> |   | <hr/> |     | <hr/> |    |     |     |     |
| 3     | 5 | 17    | 257 |       |    |     |     |     |

où vous voyez que toutes les puissances du nom-

bre 2 ; dont les exposans 1, 2, 4, 8, 16, &c. sont les termes d'une progression géométrique, sçavoir 2, 4, 16, 256, &c. sont telles que si à chacune on ajoute l'unité, les sommes 3, 5, 17, 257, &c. sont des nombres premiers. Par où il est aisé de trouver un nombre premier plus grand que quelque nombre donné que ce soit.

## V.

Les termes d'une progression géométrique peuvent aller en augmentant ou en diminuant ; mais quelle que soit la progression, on pourra la continuer à l'infini, si connoissant les deux premiers termes, on divise le carré du second terme par le premier, le quotient sera le troisième terme ; si on divise ensuite le carré du terme trouvé par le terme précédent, le quotient sera le terme suivant, & ainsi de suite. Soient donnés 2, 4, premiers termes d'une progression. Pour la continuer à l'infini, il suffit de diviser 16, carré du second terme 4, par le premier 2, le quotient 8 sera le troisième terme ; on divisera ensuite 64, carré du troisième terme 8, par le terme précédent 4, & le quotient 16 sera le quatrième terme. Ainsi du reste.

Quand la progression va en augmentant, il est plus aisé de diviser le second terme par le premier, & de multiplier le second terme par le quotient qu'on appelle exposant de la raison : le produit donne le troisième terme. On multiplie ensuite ce troisième terme par le même exposant, ce produit donne le quatrième terme. On continue la même opération, pour avoir autant de termes qu'on voudra.

## VI.

*Pour trouver quelque terme que ce soit d'une pro-*

*gression dont on connoît le premier & le second terme; si elle va en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, & qu'on veuille connoître le huitieme terme, il faut diviser le second terme 4 par le premier 2, il viendra 2 pour exposant de la progression; il faut ensuite multiplier cet exposant 2, 7 fois par lui-même, nombre du terme qu'on cherche diminué de l'unité, c'est à-dire, qu'il faut prendre la septieme puissance de 2, qui est 128, qu'on multipliera par le premier terme 2; le produit 256 sera le huitieme terme qu'on demande.*

## V I I.

*Si on propose une progression géométrique qui aille en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, le premier terme 2 est au second 4, comme la somme de tous les termes moins le dernier 256, est à la somme de tous les termes moins ce premier 2. Ainsi, pour avoir la somme de tous les termes d'une progression qui va en augmentant, comme de la précédente, il faut multiplier le dernier terme 256 par le second 4, retrancher du produit 1024, le quarré 4 du premier terme 2, & diviser le reste 1020 par 2, différence du second terme 4 au premier 2; le quotient 510 sera la somme de tous les termes de la progression proposée.*

## V I I I.

*Si l'on continue à l'infini une progression géométrique en décroissant, comme 6, 2,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{2}{27}$ , &c. la différence 4 des deux premiers termes 6, 2, est au premier 6, comme le même premier 6 est*

à la somme de tous les termes infinis. C'est pour-  
quoi, pour trouver la somme de tous les termes infinis  
d'une progression géométrique qui décroît, comme  
de la proposée, 6, 2,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{2}{27}$ , &c. il faut di-  
viser le carré 36 du premier terme 6., par la  
différence 4 des deux premiers 6., 2., & le quo-  
tient 9 sera la somme qu'on cherche, de laquelle  
ôtant 8, somme des deux premiers termes 6., 2.,  
il restera 1 pour la somme de ces fractions infinies  
continuellement proportionnelles  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{2}{27}$ , &c. On  
connoîtra de la même façon, que la somme de  
toutes ces fractions infinies continuellement propor-  
tionnelles  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ , &c. vaut aussi 1.

### R E M A R Q U E.

Quand on parle de quantités proportionnelles  
sans spécifier, cela s'entend toujours de la pro-  
portion géométrique. Nous dirons ici en passant,  
que si de l'unité, comme numérateur, & des nom-  
bres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme déno-  
minateurs, on fait cette suite de fractions,  
 $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ , &c. qui vont toujours en dimi-  
nuant, ces fractions étant prises consécutivement  
de trois en trois, comme l'on voudra, seront en  
proportion harmonique; c'est à-dire, que la pre-  
mière de ces trois sera à la troisième, comme la  
différence des deux premières est à la différence  
des deux dernières. Ce que l'on connoîtra encore  
mieux en réduisant ces fractions en même déno-  
mination, ou en entiers, comme on le voit ici  
pour les cinq fractions  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ , en les mul-  
pliant par le même nombre 60, qui est di-  
visible par tous les dénominateurs 2, 3, 4, 5;  
car à la place de ces cinq fractions, on aura ces



## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 79

cinq nombres entiers 60, 30, 20, 15, 12, dont les trois premiers 60, 30, 20, sont en proportion harmonique. Car le premier 60 est au troisième 20, qui en est la troisième partie, comme la différence 30 des deux premiers est à la différence 10 des deux derniers, qui en est aussi la troisième partie. C'est par un semblable raisonnement, que l'on connoîtra que ces trois nombres 30, 20, 15, sont en proportion harmonique, aussi-bien que ces trois autres 20, 15, 12.

## QUESTION I.

*Un grand navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils sont sur le même rumb. On demande le chemin que le grand navire doit faire pour atteindre le petit.*

**P**Arce que la distance des deux navires est 4, & que leurs vîtesses sont en raison double, continuez à l'infini cette progression géométrique double 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ , &c, dont le premier & le plus grand terme soit 4 : cherchez la somme de tous ces termes infinis, en divisant 16, carré du premier 4, par la différence 2 des deux premiers 4, 2, vous aurez 8 pour cette somme, qui fera connoître que lorsque le grand navire aura fait huit lieues, il atteindra le petit.



## Q U E S T I O N . II.

*On suppose qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortue qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrappe cette tortue, & à quelle distance il l'attrappera.*

**O**N a fait cette question, parce que Zenon, chef des philosophes appellés stoïciens, prétendoit qu'Achille ne pourroit jamais attrapper la tortue. Car tandis qu'Achille, disoit ce philosophe, feroit la premiere lieue, la tortue feroit le dixieme de la seconde lieue; & tandis qu'Achille feroit le dixieme de la seconde lieue, la tortue feroit le dixieme de cette dixieme, ou un centieme; & ainsi à l'infini.

Ce philosophe supposoit faussement que tous ces dixiemes composoient un espace infini; mais il est aisé de faire voir qu'ils font cette progression géométrique,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , &c. dont les termes vont en diminuant à l'infini. On trouvera la somme de tous ces termes infinis en divisant 1, carré du premier terme par 1, moins  $\frac{1}{10}$ , ou  $\frac{9}{10}$ , différence du premier & du second terme; le reste est  $\frac{10}{9}$ , ou  $1\frac{1}{9}$ . Ce qui fait voir qu'Achille attrappera la tortue, quand il aura parcouru la premiere lieue, & le neuvieme de la seconde lieue.

## Q U E S T I O N . III.

*Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, l'autre des minutes. Supposant qu'elles partent*

*toutes deux du point de midi , on demande en quel autre point elles doivent se rencontrer.*

**P**UISQUE l'une des deux aiguilles va douze fois plus vite que l'autre , & que quand celle des heures est au point de midi , celle-ci a un tour d'avance plus que celle-là. Leur mouvement formera donc cette progression géométrique  $1, \frac{1}{12}, \frac{1}{144}, \&c.$  qui décroît à l'infini : par conséquent si l'on divise le quarté du premier terme  $1$  , par la différence du premier au second  $\frac{11}{12}$  , on connoîtra que ces deux aiguilles se rencontreront à  $1 \frac{1}{11}$  , c'est-à-dire , à une heure & un onzième d'heure.

D'où il est aisé de conclure que ces aiguilles se rencontreront à ces heures-ci  $1 \frac{1}{11}, 2 \frac{2}{11}, 3 \frac{3}{11}, 4 \frac{4}{11}, 5 \frac{5}{11}, 6 \frac{6}{11}, 7 \frac{7}{11}, 8 \frac{8}{11}, 9 \frac{9}{11}, 10 \frac{10}{11}, 11 \frac{11}{11}$  , ou 12 heures.

### R E M A R Q U E.

On voit bien que ces trois premières questions se résolvent par l'article VIII précédent.

### Q U E S T I O N IV.

*Un maquignon vend un très-beau cheval , il se contente du prix du vingt-quatrième clou du cheval , pourvu qu'on veuille compter de manière que du premier clou on donnât 1 denier , du second 2 deniers , du troisième 4 deniers , & ainsi de suite , en doublant les deniers jusqu'au vingt-qua-*

*trieme clou. On demande de quel prix seroit le cheval.*

**P**uisque le prix des cloux forme cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. qui va en augmentant, il faut prendre la vingt-troisième puissance de 2 exposant de la progression, ce sera 8 388 608 deniers, ou trente-quatre mille neuf cent cinquante-deux livres dix sols huit deniers, pour le prix du cheval.

### REMARQUE.

La solution de cette question dépend du sixième article ; on n'a point multiplié la vingt-troisième puissance de 2 par le premier terme, qui est ici l'unité, parce qu'elle ne change rien dans la multiplication. C'est une chose à remarquer dans les progressions qui commencent par l'unité.

### QUESTION V.

*Une vieille dame possède trente-deux belles terres ; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or ; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous pretexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soyent pleins. On offre de lui donner pour cette terre, la somme qui conviendrait à la trente-deuxième de ses terres, si on payoit 1 sol pour la première, 2 sols pour la seconde, 4 sols pour la troisième, & ainsi de suite, en doublant les sols jusqu'à la trente-deuxième terre.*

**PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 79**

*Cette dame apprehende d'être trompée , elle demande quel prix on lui donneroit de sa terre.*

**O**N peut aisément la rassurer , elle trouvera son compte à vendre sa terre à la condition qui lui a été offerte. L'acheteur seroit obligé de lui donner 107 millions 374 mille 182 livres huit sols.

**R E M A R Q U E.**

On peut s'exercer à trouver ce nombre, en cherchant la trente-unieme puissance de 2 exposant de la progression, suivant l'article VI , & ce qui a été dit dans la remarque de la question précédente.

**Q U E S T I O N VI.**

*On suppose qu'un grain de bled produise 50 autres grains dans la premiere année ; qu'on sème ces 50 grains , & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxieme année , & ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de bled qui seront produits pendant douze ans.*

**C**E nombre de grains de bled produit pendant douze ans est très-considerable. Il faut d'abord trouver le douzieme terme de cette progression géométrique 1, 50, 2500, 125000, &c. qui va en augmentant. Ce douzieme terme contient ces chiffres, 48, 828, 125, accompagnés de onze zéros, & pour trouver la somme demandée, il faudroit, suivant l'article VII, multiplier encore ce douzieme terme par le second 50 : retr 1, quarré du premier terme de ce produit, & diviser le reste par 49, différence du second ter-

80 RECREAT. MATHEMAT. ET PHYS.  
me au premier. On conçoit qu'il viendrait un nombre très-grand.

### R E M A R Q U E.

Cette question est embarrassante dans le calcul , à cause de la grande raison qui est entre les termes : mais on pourra appliquer ici la quatrième question , & demander quel seroit le prix des vingt-quatre clous d'un cheval , en payant le premier 1. denier , le second 2 deniers , le troisième 4 deniers , &c. On trouvera que ce prix seroit de 16,777,215 deniers , ou de 69,905 livres 1 sol 3 deniers.

La question cinquième trouveroit ici sa place , si l'on vouloit chercher quelle seroit la somme qu'il faudroit payer pour les trente-deux terres aux conditions qui ont été offertes.

### Q U E S T I O N VII.

**J**E renfermerai dans cette question plusieurs autres , que je ne ferai que proposer. On cherchera quel peut avoir été le nombre des hommes deux cens ans après Adam , en supposant qu'ils ayent tous vécu , & que cette famille fût seulement augmentée de quatre personnes la première dixaine d'années , de huit la seconde dixaine , de seize la troisième dixaine , & ainsi de suite de dix ans en dix ans , suivant la progression double , qui est 2, 4, 8, 16 , &c. le nombre des termes de cette progression est 20 , dont il faut trouver le dernier par l'article VI , & la somme de tous ces termes par l'article VII. On jugera de cette somme par le dernier terme , qui est d'un million 48 mille 576 personnes.

2. On

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 81**

2. On examinera de combien la famille de Jacob, qui entra en Egypte avec 70 personnes, put être augmentée 200 ans après son arrivée, en supposant seulement que dans les vingt premières années elle ait été augmentée de trois fois autant, c'est à-dire, qu'au bout de 20 ans il y ait eu 210 personnes, & ainsi de suite : ce qui est très-croyable. On trouvera qu'à la fin des vingt dernières années elle a pu être composée d'un million 177 mille 810 personnes. Art. VI.

3. Qui croira que les revenus du grand-seigneur ne seroient pas capables de nourrir pendant douze ans la race d'une truie qui auroit porté d'une ventrée 6 petits cochons, dont 2 seroient mâles & les quatre autres femelles. C'est cependant une chose très-véritable, en supposant même que les quatre femelles ne portent chacune la première année que six petits cochons, dont 4 seront encore femelles & 2 mâles, & que chaque femelle en porte autant les années suivantes pendant douze ans. Cela supposé, on connoîtra que le nombre de tous les cochons, pendant ce tems, montera à 33 millions 554 mille 130. Supposant à présent qu'il ne faille qu'un écu par an pour chaque cochon, on jugera si le grand-seigneur est assez puissant pour nourrir la race d'une seule truie pendant douze ans.

**R E M A R Q U E.**

Il y a une attention à faire sur le calcul de cette somme. Il faut partager le nombre 6 des premiers petits cochons en deux termes, dont l'un, qui est 1, sera le premier terme de la progression des mâles, & l'autre, qui est 4, sera le premier terme

de la progression des femelles. Ainsi il sera aisé de connoître que la première progression est 2, 4, 8, 16, 32, &c. & que la seconde est 4, 16, 64, 256, &c. On ajoutera les sommes des 12 termes de ces deux progressions, & l'on aura le nombre des petits cochons, tant mâles que femelles.

4. On se convaincra que le monde entier ne pourra contenir toute la semence qui seroit produite d'un seul grain de moutarde pendant vingt-cinq ans, si on suppose qu'un grain de moutarde en produise mille chaque année.

5. On sera étonné du nombre prodigieux des poissons, si la plus grande partie de leurs œufs étoient féconds ; il n'y auroit qu'à supputer combien il viendrait de carpes d'une seule carpe pendant quelques années, & porter un jugement semblable pour tous les autres poissons.

6. Ce n'est point les animaux les plus féconds qui peuvent nous jeter dans l'étonnement : la fécondité des brebis même, qui ne portent qu'une fois par an, pourroit étonner leur maître, si on avoit soin de conserver tous les agneaux qui naissent pendant quelques années.

On peut connoître, suivant ce qu'on a dit dans les articles précédens, en faisant quelques suppositions, que tous les agneaux d'un grand troupeau de brebis peuvent se monter à plus de 25500 pendant l'espace de huit ans.

## PROBLEME XII.

*Des quarrés magiques.*

**O**N appelle *quarré magique* un quarré divisé en plusieurs autres petits quarrés égaux,



# PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 83

ou cases remplies de termes d'une progression qui y sont tellement disposés, que tous ceux d'une même bande, ou d'un même rang, tant en long qu'en large & en diagonale ajoutés ensemble, font une même somme, ou multipliés, donnent un même produit.

Il suit de la définition qu'on vient de lire, qu'il y a deux especes de quarrés magiques, les uns sont formés par les termes d'une progression arithmétique, les autres sont formés par les termes d'une progression géométrique.

Ces quarrés sont pairs ou impairs; les quarrés impairs sont ceux qui contiennent un nombre impair de cases, & les pairs sont ceux qui tiennent un nombre pair de cases.

*Des quarrés magiques impairs, formés par des termes en progression arithmétique.*

**L**E quarré magique suivant est un quarré impair; il est divisé en 25 petites cases égales, où les 25 premiers nombre naturels 1, 2, 3, 4, &c. sont tellement disposés, que la somme de cha-

que rang, soit de haut en bas; soit de droite à gauche, soit en diagonale, est par-tout 65.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 2 | 0 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 5 | 8 | 1 | 6 |
| 1 | 7 | 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | 9 |
| 1 | 0 | 1 | 8 | 1 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 2 | 1 | 5 |

Dans tout quarré impair, la somme des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale, est égal au pro-

duit de la racine du quarré impair & du terme moyen de la progression arithmétique. La

# 84. RECREAT. MATH. ET PHYS.

somme 65 des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale de ce quarré impair 25, est égale au produit de 5 sa racine, & de 13 terme moyen de la progression arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. Ce terme moyen se trouve dans la case du milieu du quarré, qui contient les nombres naturels, comme on le peut voir dans le quarré suivant.

Cette somme 65 se trouve aussi en disposant les termes donnés de la progression arithmétique, selon leur suite natu-

| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|----|----|----|----|----|
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

relle 1, 2, 3, 4, &c. dans quelques rangs de cases de ce quarré, qui sont les deux rangs du milieu qui traversent le quarré du haut en bas, & de gauche à droite, & chaque rang diagonal,

s'est-à-dire, qui va d'un angle du quarré à l'autre angle. La même chose arrivera aux quarrés pairs qui sont des quarrés qui contiennent un nombre quarré pair de cases.

Pour disposer magiquement dans les cases d'un

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 24 | 7  | 20 | 3  |
| 4  | 12 | 25 | 8  | 16 |
| 17 | 5  | 13 | 21 | 9  |
| 10 | 18 | 1  | 14 | 22 |
| 23 | 6  | 19 | 2  | 15 |

quarré impair, par exemple, de celui-ci, dont le côté est 5, ou qui a 25 cases, autant de nombres donnés en progression arithmétique, comme 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite jusqu'au

dernier & plus grand 25, écrivez le premier &

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 85**

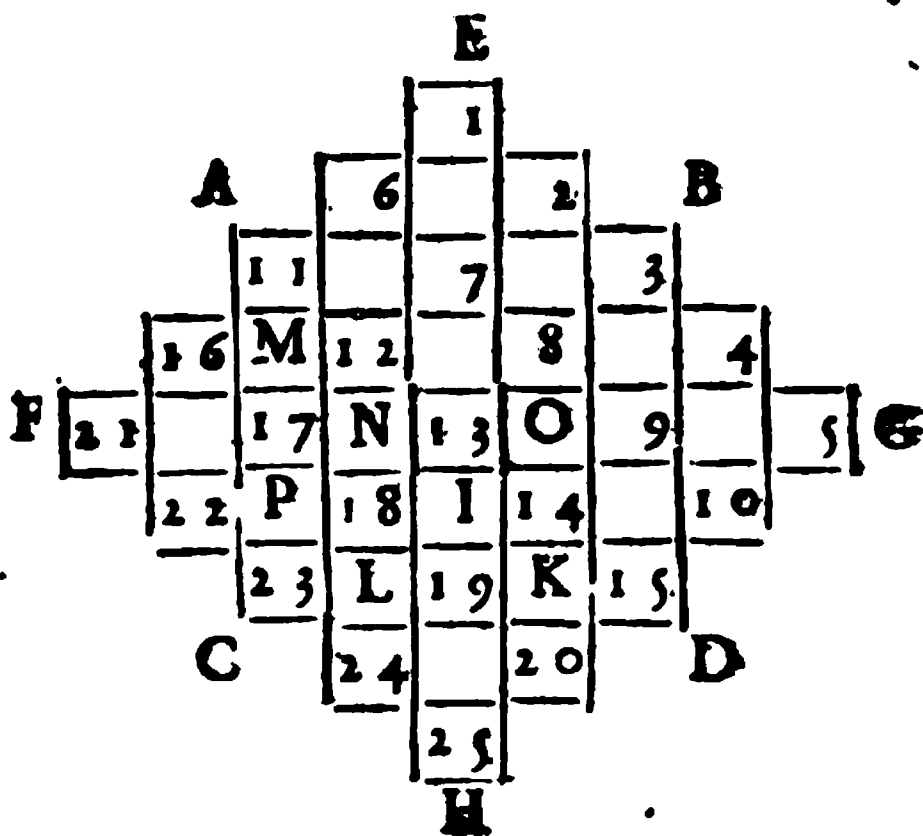
plus petit 1, dans la case qui répond immédiatement sous celle du milieu, où est le centre du carré, & suivant la diagonale vers la droite, écrivez le second terme 2 dans la case voisine & plus basse de la bande qui suit vers la droite. Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez rempli la plus basse case, comme il arrive ici au second terme 2.

Après cela, parce qu'en continuant selon la diagonale de la gauche vers la droite, le terme suivant 3, se rencontre en dehors, on le placera à la case opposée de la bande où il se rencontrera. Et parce qu'en continuant selon la diagonale vers la droite, le terme suivant 4 se trouve aussi en dehors, on le placera dans la case opposée du rang où il se rencontre en dehors. Après quoi on continuera à placer les termes suivans toujours en descendant selon la diagonale vers la droite. Mais parce que le terme 6 tombe dans une case qui est remplie, sçavoir, dans celle où il y a 1., on rétrogradera selon la diagonale de la droite vers la gauche, & l'on écrira ce terme 6 dans la seconde case du rang, où le terme précédent 5 se rencontre : en sorte qu'entre ces deux termes il reste une case vuide ; ce qu'il faut toujours pratiquer, lorsqu'une case se trouvera remplie.

Enfin on continuera selon ces regles à placer les autres termes dans les cases vuides, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'angle du carré, où dans cet exemple le terme 15 se rencontre. Alors comme on ne peut plus se conduire selon la diagonale en descendant vers la droite, pour placer le terme suivant 16, on le placera dans la seconde case d'en haut du même rang. Après quoi les autres termes se placeront dans les autres cases vuides



hors du quarré, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la case unique G, la plus éloignée hors du quarré, du côté BD, qui est à droite. Après cela vous retournerez à la seconde case hors du quarré à côté de 1 vers la gauche, où vous marquerez 6; puis en suivant toujours la diagonale, & tirant à droite vers BD, vous écrirez les chiffres 6, 7, 8, 9 & 10, qui est placé dans une dernière case hors du quarré; alors vous reviendrez à la case gauche A, la plus proche de celle qui contient 6; vous y écrirez 11, & les autres nombres 12, 13, 14, 15, dans les cases suivantes, en suivant la diagonale, & tirant à droite vers BD. Vous ferez pour le reste des nombres du quarré impair la même chose qu'on vient de faire, jusqu'à ce que vous soyez arrivé au nombre quarré impair, qui est ici 25, & qui se trouvera dans la dernière case d'en bas H, hors du quarré,



Pages  
83 &  
84.

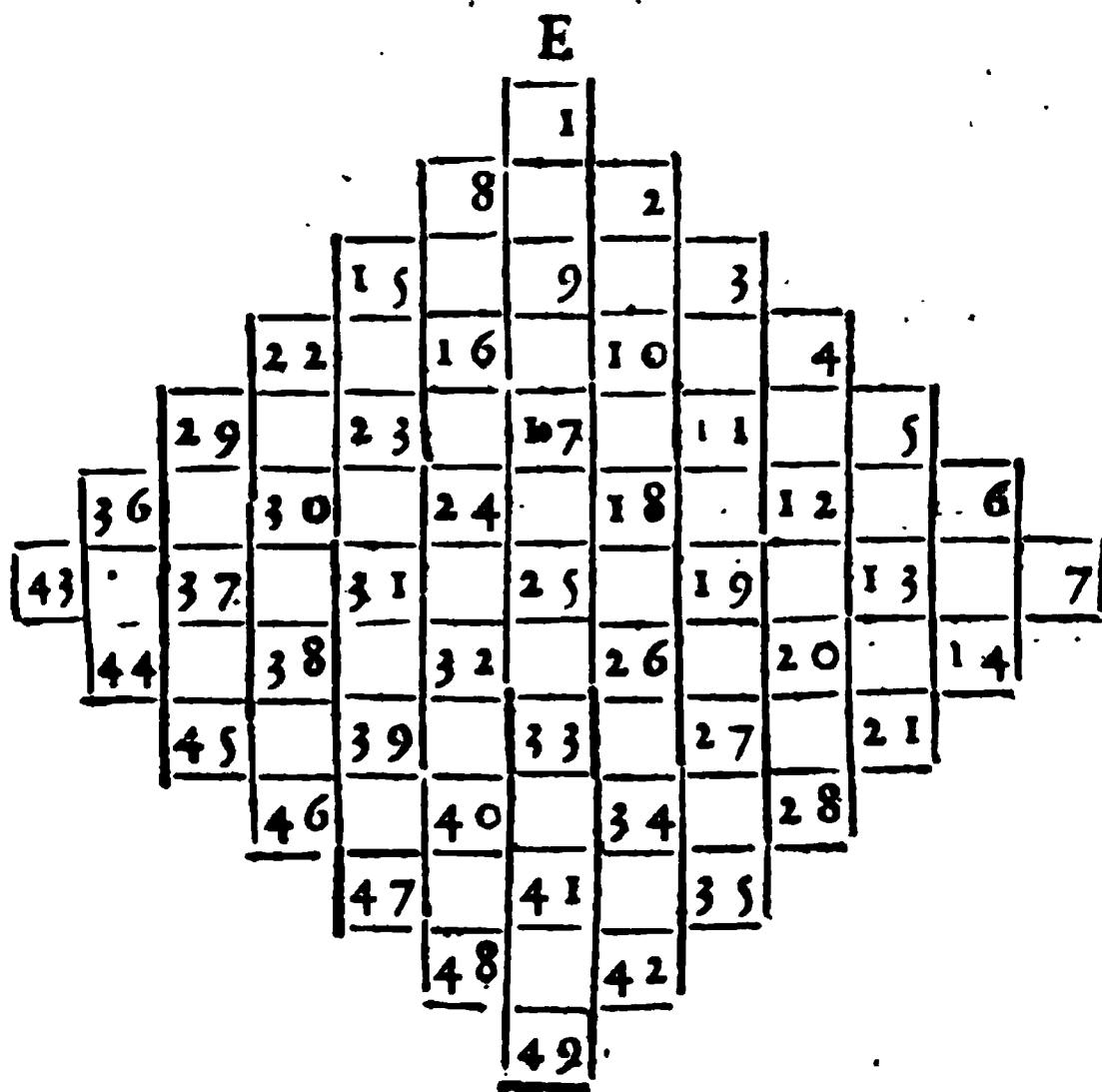
dans les cases du quarré vuide & opposées des mêmes rangs où ils se trouvent, comme 1 dans I, 2 dans K, 6 dans L, 4 dans M, 5 dans N, 21 dans O, & ainsi des autres, vous aurez la disposition du quarré magique impair de 25, telle qu'elle est rapportée ci-dessus.

Vous auriez une autre disposition des nombres dans les cases, si en commençant par la case unique hors du quarré d'en haut, au lieu de placer les nombres en tirant vers la droite, vous les placiez en tirant vers la gauche, mettant 2 dans la case où se trouve 6, mettant 13 dans celle qui est occupée par 11, &c.

Observez généralement que les nombres des cases uniques hors du quarré, comme E, F, G, H, se doivent trouver dans les cases vuides les plus proches, mais au-delà de celle qui est au centre; comme on le voit dans le quarré précédent, où 1 qui est dans E, se trouve dans M; 21 qui est dans F, se trouve dans O; 5 qui est dans G, se trouve dans N, &c. Ce que l'on peut encore remarquer plus exactement dans le quarré suivant, qui est celui de 49, où 1 qui est dans A, case hors du quarré, se trouve près, mais au-delà de 25, qui est au centre du quarré, & où le nombre 9 qui est au-dessous de l'unité dans une case hors du quarré, se trouve plus loin & au-delà de 25 dans une case du quarré. On doit faire la même remarque à l'égard des autres nombres qui se trouvent dans les cases hors du quarré.



## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.



|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 22 | 47 | 16 | 41 | 10 | 35 | 4  |
| 5  | 23 | 48 | 17 | 42 | 11 | 29 |
| 30 | 6  | 24 | 49 | 18 | 36 | 12 |
| 13 | 31 | 7  | 25 | 43 | 19 | 37 |
| 38 | 14 | 32 | 1  | 26 | 44 | 20 |
| 21 | 39 | 8  | 33 | 2  | 27 | 45 |
| 46 | 15 | 40 | 9  | 34 | 3  | 28 |

La disposition seroit encore différente, si on commençoit à mettre l'unité dans quelque autre case unique hors du quarré, & qu'on continuât à écrire les autres nombres dans l'ordre qu'on a in-

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 20 | 23 | 16 | 5  |
| 4  | 18 | 9  | 12 | 22 |
| 15 | 7  | 13 | 19 | 11 |
| 24 | 14 | 17 | 8  | 2  |
| 21 | 6  | 3  | 10 | 25 |

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 24 | 17 | 10 | 3  |
| 4  | 12 | 25 | 18 | 6  |
| 7  | 5  | 13 | 21 | 19 |
| 0  | 8  | 1  | 14 | 22 |
| 23 | 16 | 9  | 2  | 5  |

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 11 | 22 | 9  | 20 | 3  |
| 2  | 14 | 25 | 8  | 16 |
| 19 | 5  | 13 | 21 | 7  |
| 10 | 18 | 1  | 12 | 24 |
| 23 | 6  | 17 | 4  | 13 |

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 24 | 1  | 8  | 15 |
| 23 | 5  | 7  | 14 | 16 |
| 4  | 6  | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3  |
| 11 | 18 | 25 | 2  | 9  |

## R E M A R Q U E S.

**L**E quarré a été appelé *magique*, parce qu'il étoit en grande vénération parmi les Egyptiens, & les pythagoriciens leurs disciples, qui pour donner plus d'efficace & de vertu à ce quarré, le dédioient aux sept planetes en différentes manieres, & le gravoient sur une lame du métal qui sympathisoit avec la planete à laquelle il étoit dédié. Ils l'enfermoient dans un poligone régulier, inscrit dans un cercle, divisé en autant de parties égales que le côté du quarré avoit d'unités, avec les noms des anges de la planete, & des signes du zodiaque, qu'ils écrivoient dans les espaces vuides entre le poligone & la circonférence du cercle circonscrit; croyant par une vaine supersti-



tion qu'une telle médaille ou talisman, étoit favorable à celui qui la portoit sur soi en tems & lieu.

Ils attribuoient à Saturne le quarré de 9 cases, qui a trois pour racine, & 15 pour la somme des nombres de chaque bande. A Jupiter le quarré de 16 cases, qui a 4 pour côté & 34 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mars le quarré de 25 cases, qui a 5 pour côté, & 65 pour la somme des nombres de chaque bande. Au soleil le quarré de 36 cases, qui a 6 pour côté, & 111 pour la somme des nombres de chaque bande. A Vénus le quarré de 49 cases, qui a 7 pour côté, & 175 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mercure le quarré de 64 cases, qui a 8 pour côté, & 260 pour la somme des nombres de chaque bande. A la lune le quarré de 81 cases, qui a 9 pour côté, & 369 pour la somme des nombres de chaque bande.

Enfin ils attribuoient à la matiere imparfaite le quarré de 4 cases, qui a 2 pour côté, & à Dieu le quarré d'une seule case, qui a pour côté l'unité, qui étant multipliée par elle-même, ne change pas. Par le moyen de ce problême, nous résoudrons la question suivante.

## Q U E S T I O N.

*Disposer en trois rangs les neuf premieres cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme.*

**O**N disposera magiquement les neuf premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

comme vous voyez ici, par la méthode que nous avons enseignée. Alors on connoîtra que les cartes marquées des mêmes points qui sont les chiffres de chaque case, doivent être rangées de la même façon, afin que la somme de tous les points de chaque rang soit par tout la même, sçavoir, 15.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Voici de quelle manière on disposera ces cartes, pour les ranger comme elles le sont dans le quarré magique précédent.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   | 1 |   |   |
|   | 4 |   | 2 |   |
| 7 |   | 5 |   | 3 |
|   | 8 |   | 6 |   |
|   |   | 9 |   |   |

Au lieu de prendre les neuf premières cartes, on en pourroit prendre neuf autres, pourvu qu'elles fussent de suite, comme celles-ci, 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8, 9, 10 : alors elles auroient cette disposition & la somme de chaque bande ou diagonale seroit 18. On peut encore laisser le 2 & prendre le valet, en le faisant valoir 11, &c.

|   |   |    |   |   |
|---|---|----|---|---|
|   |   | 2  |   |   |
|   | 5 |    | 3 |   |
| 8 |   | 6  |   | 4 |
|   | 9 |    | 7 |   |
|   |   | 10 |   |   |

|   |    |   |
|---|----|---|
| 5 | 10 | 3 |
| 4 | 6  | 8 |
| 9 | 2  | 7 |

*Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progression arithmétique.*

**L**A règle qu'on vient d'enseigner, est générale pour disposer facilement toutes sortes de quarrés impairs. Il n'en est pas de même pour les

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 99

quarrés pairs. Ceux-ci ont des regles particulieres quoique fondées sur une démonstration générale. Le quarré de 4 ne peut être disposé magiquement le quarré de 16 est celui de tous les quarrés pairs qui le peut être plus aisément. C'est même par lui qu'on doit commencer quand on veut disposer magiquement un plus grand quarré pair. Voici ce qu'il faut faire.

Ayant fait un quarré A B C D, on remplira d'abord les diagonales AD, BC. Pour y réussir,

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| A | B  |    | F |
| E | 1  | 4  | H |
| G | 6  | 7  | D |
| C | 10 | 11 |   |
|   | 13 | 16 |   |

on commencera par compter les nombres suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. sur les cases de la premiere bande AB, de gauche à droite, & on ne marquera que 1 & 4, dans les cases A & B, qui appartiennent aux diagonales :

on comptera ensuite les autres nombres 5, 6, 7, 8, sur les cases de la seconde bande EF, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 6 & 7, dans les cases qui appartiennent aux diagonales : puis on comptera 9, 10, 11, 12, sur les cases de la troisieme bande GH, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 10 & 11, dans les cases qui appartiennent aux diagonales. Enfin on comptera 13, 14, 15, 16, sur les cases de la quatrieme bande CD, de gauche à droite, & l'on ne marquera que les nombres 13 & 16 dans les cases C & D, qui appartiennent aux diagonales.

Ces diagonales étant ainsi remplies, on remplira les cases vuides : on commencera par compter les nombres suivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, sur les cases de la bande DC, en commen-

çant par la case D, & allant ici de droite à gauche, & l'on écrira le 2 & le 3 dans les cases

A

B

E

G

C

|  |    |    |    |  |
|--|----|----|----|--|
|  | 1  | 15 | 14 |  |
|  | 12 | 6  | 7  |  |
|  | 8  | 10 | 11 |  |
|  | 13 | 3  | 2  |  |

F

H

D

vuides : on continuera de même par les bandes HG, FE & BA, en allant toujours de droite à gauche. Le quarré sera rempli de manière que la somme de chaque bande & de chaque diagonale fera 34, en quel-

que sens qu'on les prenne.

On voit bien que pour donner quelque variété à ce quarré pair, on pourroit commencer à compter par la case B, & aller de droite à gauche, pour remplir les diagonales, & puis commencer à compter à la seconde reprise par la case C, & aller de gauche à droite pour remplir les cases vuides. En un mot, on peut commencer par telle case de la diagonale qu'on voudra, & aller de droite à gauche, ou de gauche à droite, de haut en bas, ou de bas en haut; mais quand on a commencé à compter d'une façon pour remplir les diagonales, il faut aller d'un sens opposé & contraire pour remplir les cases du milieu. Au reste, ce ne sont pas là les seules variétés dont est susceptible le quarré de 16, on sera peut-être étonné d'entendre dire qu'il peut recevoir 880 dispositions différentes. Nous avons donné la manière la plus aisée.

Il n'est point nécessaire que les nombres du

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 11 | 25 | 24 | 14 |
| 22 | 16 | 17 | 19 |
| 18 | 20 | 21 | 15 |
| 23 | 13 | 12 | 26 |

quarré pair commencent par l'unité, on peut prendre 16 nombres de suite, comme 11, 12, 13, 14, &c. que l'on disposera magiquement par la méthode qu'on vient d'enseigner.

Ce

Ce carré de 16 est le fondement du carré de 36. Car quand on a formé ce carré de 16, dont on a pris les termes qui sont le plus au milieu de 36, on forme une enceinte à l'entour, dans laquelle on dispose les dix premiers nombres & les dix derniers de 36 ; de telle sorte que les deux qui correspondent dans le même rang, ou dans la même diagonale, fassent la somme de 37. Ce que l'on peut examiner dans ce carré de 36, où la somme de chaque bande & de chaque diagonale est 111.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 0 | 5 | 6 |   |   |   |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 5 | 2 | 4 | 1 | 4 | 4 |   |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 6 | 1 | 7 | 1 | 9 | 2 | 9 |   |
| 2 | 8 | 1 | 8 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 5 | 9 |   |
| 1 | 0 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 6 | 2 | 7 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 7 | 3 | 2 | 3 | 6 |   |   |   |

Pour avoir les 16 nombres qui sont le plus au milieu de 36, il faut ôter 16 de 36, & diviser le reste 20 par 2, le quotient 10 marque qu'il faut rejeter les premiers & les derniers 10 de 36 ; ainsi les 16 nombres commenceront à 11, & finiront à 26.

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'avertir, qu'au lieu des nombres, dont la suite est naturelle, on peut choisir d'autres nombres qui soient dans une progression arithmétique. C'est une remarque qui a été faite pour les carrés impairs, & qui convient aussi aux carrés pairs.

On a mis ici le quarré de 64, qui a été fait à peu près de la même maniere que le quarré de 36; la somme de chaque rang & de chaque diagonale du quarré de 64, est de 260.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 6 | 2 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 0 | 8 |   |   |   |   |
| 5 | 8 | 1 | 5 | 4 | 9 | 4 | 8 | 4 | 4 | 1 | 9 | 2 | 0 | 7 |   |
| 5 | 4 | 4 | 7 | 2 | 5 | 3 | 9 | 3 | 8 | 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 1 |
| 5 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 | 3 | 0 | 3 | 1 | 3 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | 9 | 2 | 3 | 5 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 4 | 3 | 7 | 2 | 7 | 2 | 6 | 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 4 | 4 | 5 | 1 | 6 | 1 | 7 | 2 | 1 | 4 | 6 | 5 | 0 | 5 | 1 |
| 5 | 7 | 2 |   | 3 | 6 | 1 | 5 | 9 |   | 9 |   | 5 | 6 | 4 |   |

*Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progression géométrique.*

**A**U lieu de la progression arithmétique, on peut prendre une progression géométrique, par exemple, cette progression double 1, 2, 4,

|     |    |    |   |   |
|-----|----|----|---|---|
| 8   | 2  | 5  | 6 | 2 |
| 4   | 16 | 64 |   |   |
| 128 | 1  | 32 |   |   |

8, 16, 32, 64, 128, 256, & alors il arrivera que neuf termes étant disposés magiquement, le produit qui viendra en multipliant ensemble ceux qui sont dans chaque

rang, & dans chaque diagonale, sera 4096, qui est le cube du terme moyen 16.

Il n'y a point de regle pour les quarrés en progression géométrique, différente de celle que l'on

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 99

enseigné pour les quarrés en progression arith-

métique. Ainsi on con-  
noîtra aisément que le  
quarré précédent est  
formé selon ce qui  
a été dit touchant les  
quarrés impairs, dont  
les termes sont en pro-  
gression arithmétique.

Il suffira d'en donner

la figure, sans répéter le discours.

On peut encore former ce quarré impair, dont  
les termes seront les mêmes que ceux de cette pro-  
gression géométrique 3, 9, 27, 81, 243, 729,  
2187, 6561, 19683, en suivant les mêmes  
regles.

|      |      |       |     |    |
|------|------|-------|-----|----|
|      |      | 3     |     |    |
|      | 81   |       | 9   |    |
| 2187 |      | 343   |     | 27 |
|      | 6561 |       | 729 |    |
|      |      | 19683 |     |    |

|      |       |      |
|------|-------|------|
| 81   | 19683 | 9    |
| 27   | 343   | 2187 |
| 6561 | 3     | 729  |

Le produit des nombres de l'un des rangs , est 14348907 : il est égal au produit des nombres qui sont contenus dans chacun des autres rangs , ou dans chacune des diagonales. On conçoit que ces sortes de quarrés magiques peuvent recevoir toutes les variétés dont nous avons parlé dans le quarré magique de la progression arithmétique. Car on peut commencer par tel terme qu'il plaira de la progression , comme par 1243 , & continuer jusqu'à ce qu'il y ait assez de termes pour remplir les cases du quarré.

Voici un quarré impair , dont les termes commencent par 729.

|         |         |        |
|---------|---------|--------|
| 19683   | 4782969 | 2187   |
| 6561    | 49049   | 531441 |
| 1594323 | 729     | 177147 |

*Des quarrés magiques pairs , dont les termes sont en progression géométrique.*

**I**L n'y a rien à dire de particulier sur cette sorte de quarré, on se contentera de représenter un quarré pair de 16 cases; il sera aisé d'y appliquer toutes les regles & les observations qu'on a fait sur ceux dont les termes sont en progression arithmétique. Ce quarré contient les 16 premiers termes de la progression double 1 , 2 , 4 , 8 , &c. Le produit de chaque rang , ou de chaque diagonale en quelque sens qu'on les prenne , est 1073741824 , quarré de 32768. Ce quarré



**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.** 101  
 peut recevoir 880 dispositions différentes, &  
 donner le même produit. C'est une chose très-  
 digne de remarque.

|      |     |      |       |
|------|-----|------|-------|
| 1    |     |      | 8     |
|      | 32  | 64   |       |
|      | 512 | 1024 |       |
| 4096 |     |      | 32768 |

|      |       |      |       |
|------|-------|------|-------|
| 1    | 15384 | 8192 | 8     |
| 2048 | 32    | 64   | 256   |
| 128  | 512   | 1024 | 16    |
| 4096 | 4     | 2    | 32768 |

*Des quarrés magiques en proportion harmonique.*

**N**ous ajouterons ici cet autre quarré de neuf  
 cases, dont les nombres de chaque rang,  
 de quelque maniere qu'on les  
 prenne, c'est-à-dire, en  
 long, en travers, ou en  
 diagonale, sont en propor-  
 tion harmonique. On peut  
 trouver autant d'autres nom-  
 bres qu'on voudra qui au-  
 ront la même propriété, si

|      |     |     |
|------|-----|-----|
| 1260 | 840 | 630 |
| 504  | 420 | 360 |
| 315  | 280 | 252 |

au lieu des nombres précédens on met des  
 lettres, comme vous voyez dans la table sui-

vante, où les grandeurs littérales de chaque rang sont harmoniquement proportionnelles. C'est pourquoi en donnant aux trois lettres indéterminées  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , des valeurs différentes, on aura en la place de ces quantités littérales des nombres qui conserveront dans chaque rang, la proportion harmonique.

|                   |                          |                          |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| $a$               | $\frac{2ac}{a+c}$        | $c$                      |
| $\frac{2ab}{a+b}$ | $\frac{2bc}{b+c}$        | $\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$ |
| $b$               | $\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$ | $\frac{abc}{ab+ac-bc}$   |

### AVERTISSEMENT.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond des quarrés magiques, pourront consulter la géométrie de M. Arnand, les élémens du P. Prestet, & principalement ce qui en a été dit dans les ouvrages de Messieurs de l'académie royale des sciences, imprimés en 1693.



## PROBLEME XIIL

*Du triangle arithmétique.*

**O**N appelle triangle arithmétique la moitié Plan. 1;  
d'un quarré divisé en plusieurs petits quar- fig. 1.  
rés égaux, qui contiennent les unités, les nom-  
bres naturels 1, 2, 3, 4, &c. les nombres trian-  
gulaires 1, 3, 6, 10, &c. qu'on a par l'addi-  
tion continue des nombres précédens : les nom-  
bres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c. que donne  
l'addition continue des nombres triangulaires;  
les nombres pyramido-pyramidaux, 1, 5, 15,  
35, &c. qui viennent par l'addition continue  
des nombres pyramidaux, & ainsi de suite, com-  
me vous voyez dans la figure, qu'il suffit de re-  
garder pour la comprendre.

On appellera diagonale, ou base du triangle arithmétique, les quarrés qui sont traversés par une ligne ponctuée.

Entre les différens usages du triangle arithmétique, je ne parlerai que de ceux qui servent aux combinaisons, aux permutations & autres parties du jeu, parce que les autres sont trop spéculatifs pour des récréations mathématiques.

*Des combinaisons.*

**N**OUS entendons ici par combinaisons, tous les différens choix qu'on peut faire de plusieurs choses dont le nombre est connu, en les prenant en diverses manieres, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. sans rien changer à l'ordre.

## I.

Si l'on propose quatre choses différentes, exprimées par ces quatre lettres  $a, b, c, d$ , toutes les diverses manieres d'en prendre, par exemple, deux différentes, sçavoir,  $ab, ac, ad, bc, cd$ , ou trois différentes, sçavoir,  $abc, abd, acd, bcd$ , s'appellent combinaisons. D'où il est aisé de voir que quatre choses proposées peuvent être prises une à une en quatre façons, deux à deux en six façons, trois à trois en quatre façons, & quatre à quatre en une maniere seulement. De sorte que 1 se combine dans 4 quatre fois, 2, six fois, 3, quatre fois, & 4, une fois.

## II.

Pour trouver dans un plus grand nombre de choses différentes, par exemple, de sept, les diverses combinaisons que l'on peut faire en les prenant diversément, soit pour les ajouter ensemble, ou pour les multiplier, comme si l'on vouloit sçavoir toutes les conjonctions possibles des sept planetes, en les prenant deux à deux, c'est-à-dire, si l'on vouloit sçavoir combien de fois 2 se combine dans 7, ajoutez l'unité à chacun des deux nombres donnés 2, 7, pour avoir ces deux autres nombres 3, 8, qui font connoître que dans la troisieme case de bas en haut, ou de haut en bas, de la huitieme diagonale du triangle arithmétique, on trouvera le nombre des combinaisons qu'on cherche, sçavoir, 21, qui marque les diverses rencontres des sept planetes conjointes deux à deux. Et pour connoître la huitieme diagonale, & la troisieme case de cette diagonale, comptez huit dans le premier rang horizontal, marqué d'unités, en com-

mençant par la gauche , ou dans le premier rang perpendiculaire , marqué aussi d'unités en commençant par le haut , puis prenez la troisième case en comptant par l'un ou l'autre de ces deux premiers rangs , & suivant la diagonale ponctuée.

Ou bien , parce que les deux nombres donnés sont 2 , 7 , & que le plus petit est 2 , ajoutez ensemble tous les nombres du deuxième rang jusqu'à la septième diagonale , parce que le plus grand nombre donné est 7 , sçavoir , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , & la somme 21 sera le nombre qu'on cherche.

### III.

Si vous n'avez point de triangle arithmétique qui même peut manquer , lorsque le nombre des choses proposées passera 9 , parce que nous ne l'avons pas prolongé au-delà , quoique cela soit facile , apprenez cette autre règle , qui est générale pour quelque nombre que ce soit.

Étant donné , par exemple , les deux nombres 2 , 7 , pour sçavoir combien de fois le plus petit 2 se combine dans le plus grand 7 , faites des deux nombres donnés 2 , 7 , ces deux progressions arithmétiques 2 , 1 , & 7 , 6 , qui décroissent de l'unité , & qui ne doivent avoir que deux termes , sçavoir , autant que le plus petit nombre donné 2 comprend d'unités. Après cela multipliez ensemble les termes de chaque progression , sçavoir , 7 par 6 , & 2 par 1 . Divisez le premier produit 42 par le second 2 , & le quotient 21 sera le nombre des combinaisons de 2 en 7.

C'est par cette manière , ou par la précédente , qu'on trouvera que 3 se combine dans 7 , 35 fois , & 4 aussi 35 fois , que 5 s'y combine 21 fois , & 6 seulement 7 fois.

D'où il suit que le nombre de toutes les combinaisons qui se peuvent faire dans sept choses différentes en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, sept à sept, est 127, que l'on trouve en ajoutant tous les nombres particuliers des combinaisons 7, 21, 35, 21, 7, 1, qui conviennent aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

## I V.

Mais cette somme 127 se peut trouver plus facilement, en faisant cette progression géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, qui doit être composée de sept termes, parce que le nombre composé des choses à combiner est 7. Car la somme 127 de tous ces termes sera le nombre qu'on cherche.

D'où il suit que pour avoir toutes les combinaisons de plusieurs choses proposées, il faut mettre autant de termes de la progression double 1, 2, 4, &c. qu'il y a de choses proposées, & faire

\* Prob. XI, p. 68. une somme de tous les termes ; \* cette somme donnera les différentes manières dont ces choses peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Si on a proposé quatre choses différentes, il faut se servir des quatre premiers termes de la progression double, 1, 2, 4, 8, dont la somme \* 15 montre que quatre choses peuvent être combinées en quinze manières, en les prenant une à une, deux à deux, &c. S'il y a cinq choses proposées, il faut employer les cinq premiers termes de la progression double, 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme \* 31, fait connaître qu'on peut combiner cinq choses en trente-une manières. Ainsi des autres.

## R E M A R Q U E.

Au lieu de prendre la somme des termes , on peut prendre le terme qui suit immédiatement le dernier terme donné , & le diminuer de l'unité ; le reste sera le nombre qui exprimera en combien de manieres on pourra combiner les choses données. Ainsi dans le premier exemple de cet article IV, le terme qui suit 64 est 128 , qu'il faut diminuer de l'unité ; ce reste 127 est le nombre cherché. De même dans le second exemple , le terme qui suit 16 est 32 , qui diminué de l'unité donne 31 pour le nombre demandé.

## V.

On peut encore trouver cette somme 127 plus facilement en cette sorte. Otez l'unité du nombre proposé 7 , le reste 6 fait voir qu'il faut prendre la sixieme puissance de 2 , qui est 64 , dont le double 128 étant diminué de l'unité , donnera 127 pour le nombre cherché.

## VI.

J'ajouterai ici deux méthodes particulieres aux deux nombres 2 & 3 , pour trouver combien de fois ils se combinent dans un nombre proposé qui doit être plus grand , par exemple , dans le même nombre donné 7.

Premierement , pour trouver combien de fois 2 se combinent dans 7 , ôtez ce nombre 7 de son carré 49 , & 21 , moitié du reste 42 , sera le nombre des fois que 2 se combine dans 7.

Pour trouver combien de fois 3 se combine dans 7 , ajoutez au cube 343 du nombre donné 7 le double 14 de ce même nombre 7 , & ôtez de

la somme 357, le triple 147 du quarré 49 du même nombre 7; & 35, sixieme partie du reste 210, fera le nombre des fois que 3 se combine dans 7.

## V I I.

Si on propoſoit de combiner quatre choſes, dont il y eût deux égales & deux différentes, exprimées par ces quatre lettres,  $a, a, b, c$ , on voit bien qu'on les peut prendre une à une en trois façons,  $a, b, c$ , deux à deux en quatre façons,  $aa, ab, ac, bc$ , trois à trois en trois façons,  $aab, aac, abc$ , & quatre à quatre en une ſeule façon,  $aabc$ ; ce qui fait qu'on les peut combiner en tout de 11 manieres différentes. Si on propoſoit cinq choſes, dont il y eût trois égales & deux différentes exprimées par ces lettres,  $a, a, a, b, b$ , on peut les prendre une à une en deux manieres,  $a, b$ , deux à deux en trois manieres,  $aa, ab, bb$ , trois à trois en trois manieres,  $aaa, aab, abb$ , quatre à quatre en deux manieres  $aaab, aabb$ , & cinq à cinq en une ſeule maniere ſeulement, ce qui fait en tout 11 combinaifons.

## V I I I.

Si on veut ſçavoir en combien de manieres ſe peuvent combiner quatre choſes, comme  $a, a, b, c$ , dont deux ſont les mêmes, & les deux autres ſont différentes, voici ce qu'il faut faire;  $a$  étant deux fois parmi les choſes données, on prendra ce nombre 2 qu'on gardera à part; on ajoutera l'unité à ce 2, & l'on aura 3, qui ſera multiplié par le nombre des  $b$ , qui n'eſt ici qu'une fois parmi les choſes données: ainſi l'on aura encore 3 qu'on conſervera; on ajoutera ce 3 avec le 2 déjà trouvé, on augmentera la ſomme 5 de l'unité, & l'on



aura 6 qui sera multiplié par le nombre des  $c$ , qui n'est ici qu'une fois : ainsi l'on aura 6, que l'on ajoutera aux nombres conservés 2, 3, la somme 11 montre qu'on peut combiner en onze manieres différentes ces quatre choses,  $a, a, b, c$ .

De même si on avoit proposé ces huit choses,  $a, a, a, b, b, c, c, c$ , à cause que  $a$  est trois fois, on aura 3, que l'on conservera ; on ajoutera 1 à 3, la somme 4 sera multipliée par 2, nombre des  $b$ , le produit 8 sera conservé ; on ajoutera ensemble 3, 8, & la somme 11 sera augmentée de l'unité ; ce qui donnera 12, qu'on multipliera par 3, nombre des  $c$ . Le produit 36 sera ajouté aux nombres conservés 3, 8, la somme 47 montre que ces huit choses proposées peuvent être combinées en 47 manieres.

Mais les choses données étant toutes égales,  $a, a, a, a$ , le nombre 4 des choses données fait voir qu'on ne les peut prendre qu'en quatre manieres différentes, sçavoir,  $a, aa, aaa, aaaa$ .

## IX.

On a vu dans les premiers articles que quatre choses différentes,  $a, b, c, d$ , pouvoient être combinées en 15 manieres ; on veut sçavoir s'il n'y a point un autre nombre des choses égales ou différentes qui puissent être combinées aussi en quinze manieres. Ajoutez 1 à 15, vous aurez 16.

Premierement, ayant divisé 16 par 4, il vient 4, qui étant divisé par 2 donnera 2 ; ayant divisé ce 2 par 2, il vient 1, qui ne peut plus être divisé & qu'on néglige. Prenez les trois diviseurs 4, 2, 2, ôtez de chacun l'unité, il restera 3, 1, 1, lesquels ajoutés font 5. Cette somme 5, & ces trois restes 3, 1, 1, montrent qu'on peut com-

biner en 15 manieres différentes, 5 choses, dont trois sont égales, une différente, & une autre encore différente, comme,  $a, a, a, b, c$ .

Secondement, après la premiere division de 16 par 4, on divisera le quotient 4 par 4, & il vient au quotient 1, qui ne pouvant plus être divisé, sera négligé. On prendra les deux diviseurs 4, 4, de chacun desquels ayant ôté l'unité, il viendra 3, 3, on ajoutera ces deux restes, & l'on aura 6. La somme 6 & les deux restes 3, 3, font voir qu'on peut combiner en 15 manieres six choses, dont trois sont égales, & trois autres sont encore égales, telles que sont,  $a, a, a, b, b, b$ .

Troisiemement, on divisera 16 par 8, il viendra 2; ce quotient 2 divisé encore par 2, donnera 1, qui sera négligé. De chacun de ces diviseurs 8, 2, on ôtera l'unité; on ajoutera les restes 7, 1 ensemble, la somme 8 & les restes 7, 1, montrent qu'on peut combiner en 15 manieres différentes huit choses, dont 7 seront égales, & une sera différente, comme  $a, a, a, a, a, a, a, b$ .

Quatriemement, on divisera 16 par 16, le quotient est 1 qu'on négligera. Le seul diviseur est 16, dont on ôtera l'unité; le reste 15 fait connoître qu'on peut combiner en quinze façons quinze choses égales, exprimées par ces caracteres,  $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a$ .

Enfin si on divise 16 par 2, & son quotient 8 encore par 2, puis 4 par 2, & ce 2 par 2, on trouvera que quatre choses différentes peuvent être combinées en quinze manieres différentes, parce qu'il restera quatre unités, après avoir ôté l'unité des quatre diviseurs, 2, 2, 2, 2.

R E M A R Q U E.

On voit par cet article IX, qu'on peut prendre tel diviseur qu'on voudra, & les changer dans la suite de la division, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité. On pourra examiner combien de choses peuvent être combinées un certain nombre de fois, comme 11 fois, 22 fois, &c. il faut toujours ajouter 1 au nombre proposé, comme si on propose 11, j'ajoute l'unité & je divise 12 ou par 6, ou par 4, ou par 3, ou par lui-même.

Pour donner plus de facilité à distinguer ces diviseurs, on décrira d'abord le nombre proposé, augmenté de l'unité, & au-dessous on écrira son diviseur, le quotient s'écrira à côté du nombre proposé dans une colonne séparée : le même diviseur ou un autre, s'écrira au-dessous de ce quotient, & le second quotient à côté du premier dans une troisième colonne ; le troisième diviseur s'écrira au-dessous de ce dernier quotient, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'unité, comme on le voit dans ces tables.

|  |     |   |   |   |                                     |
|--|-----|---|---|---|-------------------------------------|
| Nombre proposé<br>augmenté de l'unité. | 12. | 6 | 3 | 1 | Quotiens.                           |
| Premier diviseur                       | 2   | 2 | 3 |   | Diviseurs.                          |
|  | 1   | 1 | 2 |   | Diviseurs dimi-<br>nués de l'unité. |

|  |    |   |   |                                     |
|--|----|---|---|-------------------------------------|
| Même nomb. prop.<br>augmenté de l'unité. | 12 | 3 | 1 | Quotiens.                           |
| Premier diviseur.                        | 4  | 3 |   | Diviseurs.                          |
|  | 3  | 2 |   | Diviseurs dimi-<br>nués de l'unité. |

|  |     |   |   |                                     |
|--|-----|---|---|-------------------------------------|
| Même nomb. prop.<br>augmenté de l'unité. | 12. | 2 | 1 | Quotiens.                           |
| Premier diviseur.                        | 6.  | 2 |   | Diviseurs.                          |
|  | 5   | 1 |   | Diviseurs dimi-<br>nués de l'unité. |

|   |    |   |                                   |
|---|----|---|-----------------------------------|
| Autre nomb. prop.<br>augmenté de l'unité. | 23 | 1 | Quotiens.                         |
| Premier diviseur.                         | 23 |   | Diviseur unique.                  |
|   | 22 |   | Diviseur dimi-<br>nué de l'unité. |

Ce dernier diviseur 22 marque qu'il n'y a que 22 choses égales qui puissent être combinées en 22 manières différentes, puisque le nombre 23 est un nombre premier.

On peut consulter ce qu'on a dit des moyens de trouver toutes les parties aliquotes de quelque nombre donné. Ce sera un éclaircissement pour ce qu'on dit ici.

## QUESTION I.

UN quarré mi-parti de deux couleurs par la diagonale, peut recevoir quatre positions différentes. Car l'angle coloré peut être en bas ou en haut, mais à main gauche : ce même angle peut être encore en haut & en bas, mais à main droite. Au lieu d'un quarré, on peut donc prendre quatre quarrés, & les regarder dans ces quatre situations différentes. Je nommerai ces quatre quarrés A, B, C, D. La règle des combinaisons rapportée

rapporté ci-dessus, art. IV, fait connoître que ces quatre quarrceaux peuvent être combinés en 15 manieres différentes. Car si on les prend un à un, l'on aura A, B, C, D; deux à deux, on aura AB, AC, AD, BC, BD, CD; trois à trois, on aura ABC, ABD, ACD, BCD; & quatre à quatre, on aura seulement ABCD. Ceci n'est qu'une application des regles qu'on a données dans les cinq premiers articles précédens. Plan. 2, fig. 1.

## Q U E S T I O N II.

**O**N propose de combiner quatre de ces mêmes quarrceaux, dont deux A, A, sont égaux & les deux autres sont B & C. Suivant l'article VIII, on aura A, B, C, en les prenant un à un; AA, AB, AC, BC, en les prenant deux à deux; AAB, AAC, ABC, en les prenant trois à trois; & AABC, en les prenant quatre à quatre; ce qui donne onze manieres différentes de combiner les quarrceaux A, A, B, C.

### *Des permutations.*

**I**L y a une autre sorte de changemens, que l'on peut appeller *permutations*, où l'on prend les mêmes choses deux fois, comme si l'on veut combiner ces trois nombres 2, 5, 6, en les prenant deux à deux, pour sçavoir les différentes valeurs qu'ils peuvent produire. En considérant les deux premiers nombres en cette sorte, 25, on dira qu'ils font vingt-cinq, & en les considérant ainsi, 52, on prononcera qu'ils font 52. De même en considérant le premier & le troisieme nombre en cette sorte 26, on connoitra qu'ils font vingt-six,

& en les considérant ainsi , 62 , on dira qu'ils font soixante-deux ; ainsi des autres : où vous voyez que le nombre des permutations est double de celui des combinaisons.

On se sert des permutations , quand on veut faire des anagrammes , où l'on fait quelquefois des rencontres heureuses , c'est-à-dire , qui conviennent à leur sujet.

On se sert aussi des permutations dans le jeu de dez , pour connoître le nombre des hasards qu'auroit celui qui , avec deux dez , entreprendroit de faire , par exemple , 9. Il est certain qu'il auroit quatre hasards , parce que 9 se peut faire en quatre façons , sçavoir , par le 4 du premier dez & le 5 du second , ou bien par le 5 du premier & le 4 du second , & encore par le 3 du premier dez & le 6 du second , ou bien par le 6 du premier & le 3 du second.

## I.

Plan. 1,  
Fig. 1. Pour trouver avec le triangle arithmétique le nombre des permutations de plusieurs choses , on regardera le second rang perpendiculaire de ce triangle , comme étant le ptemier ; on cherchera dans ce second rang le nombre des choses proposées ; on ne fera attention qu'à la base dans laquelle il se trouvera. On multipliera ce nombre trouvé par l'unité ; celui de la case suivante , qui sera regardé comme le deuxieme , par 2 ; celui de la troisieme case , par 3 fois 2 , ou 6 ; celui de la quatrieme case par 4 fois 6 , ou 24 ; celui de la cinquieme case par 5 fois 24 , ou 120 ; celui de la sixieme case par 6 fois 120 ; ou 720 , & ainsi de suite , en multipliant toujours le nombre de la

case par le produit précédent. Le produit de cha- Plan. 1,  
que case de la base selon leur ordre, sera le nom- fig 1.  
bre des permutations des choses proposées prises  
une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Mais  
quand on sera parvenu à l'unité du premier rang  
parallele, on répétera le dernier nombre, qui sera  
aussi le nombre des permutations des choses pri-  
ses selon le nombre qu'on les aura proposées. Un  
exemple éclaircira cette regle.

Supposant qu'on ait proposé quatre choses, *a*  
*b*, *c*, *d*, pour sçavoir quel est le nombre de leurs  
permutations, on cherchera dans le second rang  
perpendiculaire le nombre 4, qui se trouve dans  
la base du cinquieme triangle. Ce nombre 4, mul-  
tiplié par l'unité, est le nombre des permutations  
de ces quatre choses prises une à une. On multi-  
pliera ensuite le nombre 6 de la case suivante,  
qui est regardée comme la deuxieme dans la mê-  
me base, par 2, le produit 12 sera le nombre des  
permutations des choses proposées, prises deux à  
deux; puis on multipliera le nombre 4 de la troi-  
sieme case de la même base par trois fois 2 ou 6,  
le produit 24 est le nombre des permutations des  
choses proposées, prises trois à trois: enfin comme  
on est parvenu à l'unité, qui est dans le premier  
rang parallelle, & qui est commune à la base du  
cinquieme triangle, on répétera le même pro-  
duit qu'on vient de trouver, sçavoir, 24 qui sera  
aussi le nombre des permutations des choses prises  
quatre à quatre.

Si l'on veut sçavoir le nombre de toutes ces per-  
mutations, on ajoutera les produits trouvés 4,  
12, 24, 24; leur somme 64 est le nombre de  
toutes ces permutations: c'est-à-dire, que quatre  
choses différentes peuvent recevoir 64 change-

116 RECREAT. MATHÉMAT. ET PHYS.  
mens différens, sans être prises deux fois dans aucune de ces permutations.

## II.

Il n'est point nécessaire de se servir du triangle arithmétique, pour trouver toutes les permutations, ou les transpositions possibles de plusieurs choses, par exemple, de ces quatre lettres, AMOR, prises quatre à quatre; on fera cette progression arithmétique 1, 2, 3, 4, composée d'autant de termes qu'il y a de lettres proposées, en sorte que le premier terme soit toujours l'unité, & que le dernier exprime le nombre des lettres: & alors en multipliant ensemble tous ces termes, le produit

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| AMOR | MARO | OAMR | ROMA |
| AMRO | MAOR | OARM | ROAM |
| AOMR | MOAR | OMAR | RMAO |
| AORM | MORA | OMRA | RMOA |
| ARMO | MRAO | ORAM | RAMO |
| AROM | MROA | ORMA | RAOM |

24 sera le nombre des permutations, ou changemens différens que l'on peut faire des quatre lettres proposées AMOR, comme vous voyez ici.

## III.

C'est de la même façon que l'on trouvera le nombre des permutations d'une autre multitude de lettres, sçavoir, en faisant une progression d'autant de nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y aura de lettres à combiner ensemble, & en multipliant ensemble tous les termes de cette progression. Ainsi vous trouverez que cinq lettres se peuvent combi-



PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 117

ner simplement, ou transposer en 120 manieres, six en 720, & ainsi des autres, comme vous voyez dans la table suivante, qui montre que les 23 lettres de l'alphabet se peuvent combiner en 25852016738884976640000 façons.

|    |                             |
|----|-----------------------------|
| 1  | 1. A.                       |
| 2  | 2. B.                       |
| 3  | 6. C.                       |
| 4  | 24. D.                      |
| 5  | 120. E.                     |
| 6  | 720. F.                     |
| 7  | 5040. G.                    |
| 8  | 40320. H.                   |
| 9  | 362880. I.                  |
| 10 | 3628800. K.                 |
| 11 | 39916800. L.                |
| 12 | 479001600. M.               |
| 13 | 5227020800. N.              |
| 14 | 87178291200. O.             |
| 15 | 1307674368000. P.           |
| 16 | 20922789888000. Q.          |
| 17 | 355687428096000. R.         |
| 18 | 6402373705728000. S.        |
| 19 | 121645100408832000. T.      |
| 20 | 2432902008176640000. V.     |
| 21 | 51090942178709440000. X.    |
| 22 | 112400072777760780000. Y.   |
| 23 | 25852016738884976640000. Z. |
| 24 | 620448401733239439360000.   |
| 25 | 15511210043330985984000000. |

Cette table est aisée à construire; car ayant connu, par exemple, que 4 lettres se peuvent combiner ou transposer en 24 façons, si l'on multiplie

ce nombre 24 des permutations par le nombre 5, qui suit immédiatement après le 4, on aura 120 pour le nombre des permutations de 5 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 6, on aura 720 pour le nombre des permutations de 6 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 7, le produit 5040 sera le nombre des permutations de 7 lettres, & ainsi de suite.

### Q U E S T I O N I.

**D**'Où il suit que si on veut sçavoir en combien de manières différentes sept personnes peuvent se ranger à table, il n'y a qu'à multiplier les premiers nombres naturels jusqu'à sept de cette sorte, 1 fois 2 fois 3 fois 4 fois 5 fois 6 fois 7. Le produit 5040 fait voir que sept personnes peuvent être rangées à une table en 5040 manières différentes.

### Q U E S T I O N II.

**A**près avoir fait attention à ce que l'on vient de dire, on n'aura point de peine à croire que huit enfans de chœur puissent tellement changer de place au chœur trois fois par jour, à matines, à la messe & à vêpres, qu'ils seroient environ 37 ans à achever ces changemens différens. Il est vrai que c'est une chose surprenante, mais il est constant que huit choses peuvent recevoir quarante mille trois cents vingt changemens; & comme il s'en feroit trois par jour, si on divise 40320 par 3, on aura 13440 jours, qui font près de 37 ans, pendant lesquels il faudroit faire chaque jour trois changemens.

## QUESTION III.

**O**N connoîtra par le même moyen que les huit mots de ce vers fait à l'honneur de la Sainte Vierge, peuvent recevoir les mêmes chan-

*Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cælo.*

gemens, étant pris huit à huit, si on ne se soucie pas d'observer la mesure du vers : mais si on veut garder la mesure du vers hexametre, au lieu de 40320 permutations, ils n'en recevront que 3276. C'est-à-dire, que les mots de ces vers pourront avoir 3276 situations, & conserver dans chacune de ces situations la mesure du vers hexametre.

## QUESTION IV.

**L**Es douze apôtres ayant disputé qui d'entr'eux seroit le premier, Jesus-Christ leur déclara que celui qui voudroit être le premier seroit le dernier, & que le dernier deviendrait le premier. Supposons qu'après cette leçon d'humilité, chacun voulût céder la premiere place, la seconde & la troisieme place à son compagnon, & qu'ainsi ils eussent résolu de ne demeurer jamais ensemble dans une même disposition, on demande en combien de manieres ils auroient pu changer de place, en sorte qu'ils ne se fussent jamais rencontrés les uns à l'égard des autres dans la même situation. *Réponse.* Ils auroient pu changer en quatre cens soixante-dix-neuf millions mille six cens manieres différentes.

Si l'on suppose que les onze apôtres eussent toujours observé de laisser la premiere place à saint Pierre, ils auroient pu changer de place en

120 RECREAT. MATH. ET PHYS.  
trente-neuf millions neuf cens seize mille huit cens  
manieres différentes.

## Q U E S T I O N V.

**M**Ais ce qui paroîtra encore bien plus surprenant, c'est le calcul énorme qu'on va faire pour les différens changemens qui arriveroient à 24 noms qui ne rempliroient que deux lignes, supposant qu'on pût écrire 1440 lignes en chaque feuille de papier, ou bien 720 fois ces 24 noms, & que chaque rame de papier fût tellement battue qu'elle n'eût qu'un pouce d'épaisseur, je dis qu'il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire tous les changemens de ces 24 noms qu'il n'en pourroit contenir depuis le centre de la terre jusqu'au firmament, en les mettant les unes sur les autres. Car supposant qu'il y a 28,862,640,000,000 de pouces, du centre de la terre aux étoiles il faudroit 1,751,245,560,364,553,942 rames de papier & plus, pour écrire les 620448401733239439360000 changemens que peuvent recevoir ces 24 noms, parce que chaque rames de papier contenant 500 feuilles, & chaque feuille 720 changemens, chaque rame de papier contiendrait 360000 de ces changemens. Or divisant les 24 nombrés 620, &c. par celui que contiendrait chaque rame, il vient 1,751, &c. qui est un nombre de pouces plus grand que celui qu'il y a depuis le centre de la terre jusqu'au firmament.

On voit aisément qu'il est impossible d'écrire toutes les permutations de ces 24 noms : car tous les princes du monde ne pourroient payer le papier, quand la rame ne coûteroit que 20 sols, & cent

mille scribes seroient 336,047,223,141 ans à écrire toutes les permutations de ces 24 noms, quand ils écriraient chacun une rame par semaine & travailleroient nuit & jour; en sorte que chaque personne remplît 71 feuilles par jour, qui seroient cinq millions deux cens milles rames par an. Supposons encore qu'on voulût donner à chacun de ces scribes deux cens livres par an, ce seroit vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier. Comme il faudroit continuer cette dépense pendant 336,047,223,141 ans, elle se monteroit à la somme de six cens nonante-six quintillons, six cens sept quadrillons, six cens vingt trillions, deux cens trente-un billions, cinq cens trente-deux millions de livres.

L'imagination se perd dans ces sortes de supputations, qui cependant sont très-vraies, puisqu'elles sont fondées sur les principes certains de l'arithmétique.

## Q U E S T I O N   V I.

**O**N veut sçavoir combien de permutations peuvent recevoir les quatre quarrceaux A, B, C, D, mi-partis de deux couleurs par la diagonale, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre. Pour y procéder avec ordre on cherchera toutes les combinaisons de ces quatre quarrceaux, qu'on a trouvé être A, B, C, D, pris un à un; AB, AC, AD, BC, BD, CD, pris deux à deux; ABC, ABD, ACD, BCD, pris trois à trois, & ABCD, pris quatre à quatre. Il faut ensuite chercher combien peuvent recevoir de permutations ces quarrceaux suivant les quatre différentes combinaisons qu'on vient de voir.

Plan. 2;  
fig. 1. 1

Plan. 2, Les quatre premières combinaisons des quar-  
 fig. 1. reaux A, B, C, D, pris un à un, ne donnent  
 point d'autres permutations; les six combinaisons  
 suivantes des quareaux AB, AC, &c. pris deux à  
 deux, en donnent chacune deux; art. III & quest.  
 I, ce qui fait 12 permutations. Les quatre com-  
 binaisons des quareaux ABC, &c. pris trois à  
 trois, donnent chacune six permutations, art. III,  
 ce qui fait 24 permutations. Enfin la seule combi-  
 naisson des quareaux ABCD, pris quatre à quatre,  
 donne encore 24 permutations, art. III. Si l'on  
 ajoute toutes ces permutations 4, 12, 24, 24, elles  
 feront la somme de 64. C'est-à-dire, que quatre  
 quareaux ABCD, pris un à un, deux à deux, trois  
 à trois, & quatre à quatre, peuvent être changés  
 en soixante-quatre manières différentes.

## Q U E S T I O N V I I.

**S**I on veut que ces quareaux soient pris deux  
 à deux, & que chacun soit répété, il est aisé de  
 connoître qu'il y aura seize permutations. Car par  
 l'article II ou III des combinaisons, on trouve  
 que 2 en quatre peut être combiné six fois; & par  
 l'article II, & question I, des permutations, on  
 sçait que 2 choses ne peuvent recevoir que 2  
 changemens; ainsi ces six combinaisons donne-  
 ront 12 permutations, auxquels si l'on joint les  
 quatre AA, BB, CC, DD, de chaque quareau  
 répété, on aura 16 permutations.

## R E M A R Q U E.

Ce que l'on vient de dire des combinaisons  
 jointes aux permutations, fait entrevoir que qua-

tre quarrceaux peuvent fournir des compartimens & des desseins à l'infini. C'est ce qu'a heureusement exécuté le pere Douat dans un traité très-curieux qu'il vient de faire paroître \* sur un mémoire que le pere Sebastien Truchet présenta à l'académie royale des sciences en 1704. On y verra que ces quatre quarrceaux pris quatre à quatre , répétés & permutés , forment 256 figures différentes. On verra avec étonnement qu'en prenant ces 256 figures deux à deux , trois à trois , & ainsi de suite jusqu'à 256 , on peut trouver un nombre prodigieux de compartimens , dont les desseins seront tous différens. On pourra s'exercer soi-même en faisant des quarrceaux de cartons mis-partis de deux couleurs par la diagonale , & les disposant en toutes les façons qu'on imaginera.

\* en  
1722.

Cet ouvrage n'est pas seulement curieux , il est encore très-utile , particulièrement aux architectes , qui y trouveront une source intarissable pour le carrelage.

### *Des partis du jeu.*

**O**N appelle *parti* en matiere du jeu , la juste distinction , ou le réglement de ce qui doit appartenir à plusieurs joueurs de l'argent qui est au jeu , & qu'ils jouent en un certain nombre de parties proportionnellement à ce que chacun a droit d'espérer de la fortune par le nombre des parties qui lui manquent pour achever.

On suppose que deux joueurs ont mis chacun 40 pistoles au jeu. Dans ce cas cet argent ne leur appartient plus , parce qu'en le mettant au jeu ils en ont quitté la propriété. Mais en revanche ils ont le droit d'attendre ce que le hasard peut leur

en donner, suivant les conditions dont ils sont convenus avant que de jouer. On suppose encore qu'ils jouent 80 pistoles en trois parties, que le premier ait une partie, & que le second n'en ait point, c'est-à-dire, qu'il manque deux parties au premier pour gagner, & trois au second. Enfin si les joueurs veulent se séparer en renonçant à l'attente du hasard, pour rentrer chacun dans la propriété de quelque chose, le premier à raison des deux parties qui lui manquent, & le second à raison des 3 parties qu'il lui faut pour gagner tout l'argent; on demande quelle est la portion que chacun des joueurs doit retirer de l'argent qu'ils ont mis au jeu. On peut trouver cette portion, ou ce parti, par le moyen du triangle arithmétique, en cette sorte.

Parce que nous avons supposé qu'il manque au premier joueur 2 parties, & trois au second pour gagner, & que la somme des deux nombres 2 & 3 est 5, il faut prendre dans la cinquième diagonale du triangle arithmétique, la somme 5 des deux premiers nombres 1, 4, à cause des deux parties qui manquent au premier joueur, & la somme 11 des 3 autres 6, 4, 1, à cause des trois parties qui manquent au second joueur, & ces deux dernières sommes 5, 11, donneront la raison réciproque des deux partis qu'on cherche; de sorte que le parti de celui à qui il ne manque que 2 parties est au parti de celui à qui il en manque 3, comme 11 est à 5.

Plan. 1, fig. 1:

Mais pour déterminer ces deux partis, c'est-à-dire, pour assigner à chacun la part des 80 pistoles qui sont au jeu, à raison des avantages qu'il a, il faut diviser ce nombre 80 en deux parties proportionnelles aux deux termes 11, 5; ce qui se fera en



PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 125

multipliant séparément par ces deux termes 11, 5, le nombre 80 des pistoles qui sont au jeu, & divisant chacun des deux produits 880, 400, par la somme 16 des deux mêmes termes 11, 5, on aura 55 pour le nombre des pistoles que doit emporter le premier joueur qui a une partie, & 25 pour le nombre des pistoles que doit prendre le second joueur qui n'a point de partie.

Pareillement s'il manque 1 partie au premier joueur, & 2 au second pour gagner, on ajoutera ensemble ces deux nombres de parties 1, 2, & parce que leur somme est 3, on prendra dans la troisième diagonale du triangle arithmétique, le seul & premier nombre 1, & la somme 3 des deux autres 2, 1 : ces deux nombres 1, 3, font connaître que le parti du premier joueur est au parti du second, comme 3 à 1. Et parce que la somme de ces deux termes 1, 3, est 4, il s'ensuit que le premier joueur doit avoir les  $\frac{3}{4}$  des 80 pistoles qui sont au jeu, & le second seulement  $\frac{1}{4}$ . Par conséquent il appartient 60 pistoles au premier joueur, & 20 au second, dans la supposition que nous avons faite qu'ils veulent se séparer sans continuer le jeu.

Par-là vous voyez que si le jeu est dans cet état, qu'il manque au premier joueur une partie, & au second deux parties pour achever, le premier joueur pourroit parier au pair 3 contre 1.

On peut résoudre ces sortes de questions sans le secours du triangle arithmétique, en cette sorte.

Puisqu'il manque au premier joueur une partie : C'est pour achever, & qu'il en manque deux au second, on considérera que si les joueurs continuoient de

jouer, & que le second gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever, & que dans ce cas les deux joueurs ayant des hasards égaux, leurs partis seroient aussi égaux, par cette regle générale, qui porte que le parti du premier joueur est au parti du second, en même raison que le nombre des hasards qui peuvent faire gagner le premier, au nombre des hasards qui peuvent faire gagner le second. Ainsi dans cette supposition le parti de chacun seroit la moitié de l'argent qui est au jeu.

Il est donc certain que si le premier gagne la partie qui se va jouer, tout l'argent qui est au jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. C'est pourquoi, s'ils veulent se séparer sans jouer cette partie, le premier doit avoir la moitié de l'argent qui est au jeu, & encore la moitié de la moitié du même argent, c'est-à-dire, qu'il doit avoir les  $\frac{3}{4}$  de cet argent. Le reste  $\frac{1}{4}$  appartiendra au second. Car il est évident que si un joueur prétend une certaine somme en cas de gain, & une somme moindre en cas de perte, le sort étant égal, son parti est que sans jouer, il lui appartient la moitié de ces deux sommes prises ensemble.

2. *Cas.* Ce premier cas servira à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & au second trois parties. Car si le premier gagne une partie, il doit emporter les 80 pistoles qui sont au jeu, & s'il perd une partie, en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour achever, il appartiendra au premier les  $\frac{3}{4}$  de l'argent, *par le premier cas.* Ainsi

en cas de gain, le premier emportera tout l'argent ; & en cas de perte , il ne lui en appartiendra que les  $\frac{1}{4}$ . C'est pourquoi en cas de parti , il ne lui en doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble , c'est-à-dire  $\frac{7}{8}$  , ou 70 pistoles. Le reste  $\frac{1}{8}$  , ou 10 pistoles appartiendront au second.

3. *Cas.*  
Ce second cas servira de la même façon à résoudre le suivant , qui suppose qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever , & trois au second. Car si le premier gagne une partie , il doit avoir les  $\frac{7}{8}$  de l'argent qui est au jeu , par le 2. *cas* ; & s'il perd une partie , en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour gagner , savoir , autant qu'il en manque au premier , chacun doit avoir pour son parti la moitié de l'argent qui est au jeu. C'est pourquoi en cas de gain , le premier emportera  $\frac{7}{8}$  de l'argent qui est au jeu , &  $\frac{1}{2}$  en cas de perte , & ainsi en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble , c'est-à-dire  $\frac{11}{16}$  , ou 55 pistoles. Le reste  $\frac{5}{16}$  , ou 25 pistoles , appartiendront au second.

4. *Cas.*  
Le second cas servira encore à résoudre ce quatrième , qui suppose qu'il manque au premier joueur une partie pour achever , & quatre au second. Car si le premier gagne une partie , il remportera les 80 pistoles qui sont au jeu , & s'il en perd une ; en sorte qu'il n'en faille plus que trois au second pour achever , il appartiendra au premier les  $\frac{7}{8}$  de tout l'argent , par le 2. *cas*. Ainsi puisqu'en cas de gain , le premier doit emporter

tout l'argent , & qu'en cas de perte il n'en doit emporter que les  $\frac{7}{8}$  ; en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux sommes prises ensemble , c'est-à-dire ,  $\frac{15}{16}$  , ou 75 pistoles. Le reste  $\frac{1}{16}$  , ou 5 pistoles appartiendront au second.

5. Cas. Ce quatrieme cas & le troisieme serviront de la même façon à résoudre le suivant , qui suppose qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever , & quatre au second. Car si le premier gagne une partie , en sorte qu'il ne lui en manque plus qu'une pour achever , il doit remporter les  $\frac{15}{16}$  de l'argent qui est au jeu , par le 4. cas , & s'il en perd une , en sorte qu'il n'en manque plus que trois au second , il doit en remporter seulement les  $\frac{11}{16}$  , par le 3. cas. Ainsi puisqu'en cas de gain le premier doit remporter les  $\frac{15}{16}$  de tout l'argent , & seulement les  $\frac{11}{16}$  en cas de perte , il doit en cas de parti prendre la moitié de ces deux sommes prises ensemble , c'est-à-dire ,  $\frac{13}{16}$  , ou 65 pistoles. Le reste  $\frac{3}{16}$  , ou 15 pistoles , appartiendront au second. Ainsi des autres.

*Autrement & plus facilement.*

Tous les cas précédens , & tous les autres infinis qui peuvent arriver , peuvent encore se résoudre autrement sans le secours du triangle arithmétique , & plus facilement en cette sorte.

6. Cas. Pour résoudre , par exemple , le cinquieme cas ,  
où

où l'on suppose qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & 4 au second, de sorte qu'il leur manque ensemble 6 parties pour achever, ôtez 1 de cette somme 6, & parce qu'il reste 5, on supposera ces cinq lettres semblables *aaaaa* favorables au premier joueur, & pareillement ces cinq lettres semblables *bbbbb* favorables au second joueur. On combinera ensemble ces dix lettres, comme vous le voyez dans cette table, où des 32 combinaisons, les 26 premiers vers la gauche, où se rencontre au moins deux *a*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties : & les six dernières vers la droite, où il y a au moins quatre *b*, seront prises pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le second, parce qu'il lui manque quatre parties.

|              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>aaaaa</i> | <i>aaabb</i> | <i>aabbb</i> | <i>abbbb</i> |
| <i>aaaab</i> | <i>aabba</i> | <i>abbba</i> | <i>bbbba</i> |
| <i>aaaba</i> | <i>abbaa</i> | <i>bbbaa</i> | <i>babbb</i> |
| <i>aabaa</i> | <i>baaaa</i> | <i>ababb</i> | <i>bbabb</i> |
| <i>abaaa</i> | <i>aabab</i> | <i>abbab</i> | <i>bbbab</i> |
| <i>baaaa</i> | <i>abaab</i> | <i>ababb</i> | <i>bbbbb</i> |
|              | <i>baaab</i> | <i>baabb</i> |              |
|              | <i>baaba</i> | <i>babba</i> |              |
|              | <i>babaa</i> | <i>bbaba</i> |              |
|              | <i>ababa</i> | <i>babab</i> |              |

Ainsi le parti du premier joueur sera au parti du second, comme 26 est à 6, ou comme 13 est à 3, &c.

Pareillement, pour résoudre le troisieme cas, où l'on suppose qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois parties au se-

cond , de sorte qu'il leur manque ensemble 5 parties pour achever , ôtez 1 de cette somme 5 , & parce qu'il reste 4 , supposez ces quatre lettres semblables *aaaa* favorables au premier , & ces quatre lettres semblables *bbbb* favorables au second. Combinez ensemble ces huit lettres , comme vous

|             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| <i>aaaa</i> | <i>aabb</i> | <i>abbb</i> |
| <i>aaab</i> | <i>abba</i> | <i>bbba</i> |
| <i>aaba</i> | <i>bbaa</i> | <i>bbab</i> |
| <i>abaa</i> | <i>baab</i> | <i>babb</i> |
| <i>baaa</i> | <i>baba</i> | <i>bbbb</i> |
|             | <i>abab</i> |             |

le voyez dans cette table , où des 16 combinaisons , les 11 premières à la gauche , où il y a au moins deux *a* , seront prises pour le nombre des hasards qui peuvent faire gagner le premier , parce

qu'il lui manque deux parties : & les 5 dernières vers la droite , où il y a au moins trois *b* , seront prises pour le nombre des hasards qui peuvent faire gagner le second , parce qu'il lui manque trois parties. Ainsi le parti du premier joueur est au parti du second , comme 11 est à 5 , &c.

4. Cas.

Enfin pour résoudre le quatrième cas , où l'on a supposé qu'il manquoit au premier joueur une partie pour achever , & quatre au second , il vient la même somme 5 des parties qui manquent ensemble à ces deux joueurs , on se servira des 16 combinaisons précédentes , entre lesquelles on en trouvera 15 , où il y aura au moins une lettre *a* , parce qu'il manque au premier joueur une partie , pour le nombre des hasards qui le peuvent faire gagner , & seulement une , où il y a quatre *b* , parce qu'il manque au second joueur quatre parties , pour un seul hasard qui le peut faire gagner ; de sorte que le parti du même joueur est au parti du second , comme 15 est à 1. Ainsi des autres.

*Du jeu des dez.*

**P**OUR sçavoir entre deux joueurs l'avantage que peut avoir celui qui entreprend d'amener, par exemple, 6 avec un dé en un certain nombre de coups, & premierement au premier coup, on considérera que le parti à l'entreprendre du premier coup est de 1 contre 5, parce que celui qui tient le dé, n'a qu'un hasard pour gagner, & qu'il en a cinq pour ne rien gagner. Par conséquent pour l'entreprendre en un seul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5, ou ce qui est la même chose, parier 1 contre 5. Ce qui fait voir que d'entreprendre d'amener 6 avec un dé en un coup, il y a désavantage.

Pour entreprendre d'amener 6 en deux coups, avec un dé, on considérera que c'est la même chose que d'entreprendre en jettant deux dez à la fois d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé n'a que 11 hasards pour gagner; car il peut amener 6 avec le premier dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le second: ou bien 6 avec le second dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le premier: ou bien encore 6 avec chaque dé. Mais il y a 25 hasards

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1, 1 | 2, 1 | 3, 1 | 4, 1 | 5, 1 |
| 1, 2 | 2, 2 | 3, 2 | 4, 2 | 5, 2 |
| 1, 3 | 2, 3 | 3, 3 | 4, 3 | 5, 3 |
| 1, 4 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 4 | 5, 4 |
| 1, 5 | 2, 5 | 3, 5 | 4, 5 | 5, 5 |

hasards pour ne rien gagner, comme vous voyez ici. D'où il est aisé de conclure que celui qui entreprend en deux coups d'amener 6 avec un dé, ne

doit mettre que 11 contre 25, & qu'ainsi il y a désavantage de l'entreprendre au pair.

Vous prendrez garde que la somme 36 de tous les hasards, 11, 25, est le quarré du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en deux coups avec un dé, & que le nombre 25 des hasards qui peuvent empêcher celui qui tient le dé de gagner, est le quarré du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire, de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hasards favorables à celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter 1 du double 12, du nombre donné 6, & le reste 11, sera le nombre qu'on cherche; on ôtera ce reste 11 de 36, quarré du même nombre donné 6: ce second reste 25, qui sera toujours un nombre quarré, sera le nombre des hasards contraires à celui qui tient le dé.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups avec un dé, on considérera pareillement que c'est la même chose que d'entreprendre en jettant trois dés à la fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé a 91 hasards favorables, & 125 contraires, & ainsi il ne doit mettre que 91 contre 125, où vous voyez qu'il y a encore désavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en trois coups avec un dé.

Vous remarquerez que la somme 216 de tous les hasards 91, 125, est le cube du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en trois coups avec un dé, & que le nombre 125 des hasards contraires à celui qui tient le dé, est le cube du même nombre donné 6 moins 1, c'est-à-dire, de 5. C'est pourquoi pour trouver le nombre des hasards qui peuvent faire gagner celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter du cube 216 du



nombre donné 6 , le cube 125 du même nombre donné 6 moins 1 , ou de 5.

C'est de la même façon qu'on trouvera l'avantage que peut avoir celui qui entreprendroit en quatre coups d'amener 6 avec un dé. Car si l'on ôte de la quatrième puissance, ou du quarré-quarré 1296 , du nombre donné 6 , le quarré-quarré 625 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5, le reste donnera 671 hasards favorables à celui qui tient le dé : & le plus petit quarré-quarré précédent 625 , sera le nombre des hasards contraires à celui qui tient le dé. Où vous voyez que celui qui entreprend en quatre coups d'amener 6 avec un dé , peut mettre 671 contre 625 , & qu'ainsi il y a avantage à l'entreprendre au pair.

L'avantage sera plus grand à entreprendre d'amener 6 en cinq coups avec un dé , comme on le connoitra en ôtant de la cinquième puissance , ou surfolide 7776 du nombre donné 6 , le surfolide 3125 du même nombre donné 6 moins 1 , ou de 5. Car le reste 4651 sera le nombre des hasards favorables à celui qui tient le dé , & le plus petit surfolide précédent 3125 , sera le nombre des hasards contraires à celui qui tient le dé. Où l'on voit que celui qui entreprend en cinq coups d'amener 6 avec un dé , peut mettre 4651 contre 3125 , & qu'ainsi il y a de l'avantage à l'entreprendre au pair.

Si vous voulez sçavoir le parti de celui qui voudroit entreprendre d'amener en un coup avec deux ou plusieurs dés , une rasle déterminée , par exemple , terne , vous considérerez que s'il l'entreprendoit avec deux dés , il n'auroit qu'un hasard pour gagner , & 35 pour perdre : parce que deux dés peuvent se combiner en 36 façons différentes, c'est-

# 134 RECREAT. MATH. ET PHYS.

à-dire, que leurs faces qui sont au nombre de 6, peuvent avoir 36 assiettes différentes, comme vous le voyez dans cette table, ce nombre 36 étant le

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 1, 1 | 2, 1 | 3, 1 | 4, 1 | 5, 1 | 6, 1 |
| 1, 2 | 2, 2 | 3, 2 | 4, 2 | 5, 2 | 6, 2 |
| 1, 3 | 2, 3 | 3, 3 | 4, 3 | 5, 3 | 6, 3 |
| 1, 4 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 4 | 5, 4 | 6, 4 |
| 1, 5 | 2, 5 | 3, 5 | 4, 5 | 5, 5 | 6, 5 |
| 1, 6 | 2, 6 | 3, 6 | 4, 6 | 5, 6 | 6, 6 |

quarré du nombre 6 des faces des deux dés. S'il y avoit trois dés, au lieu de 36, quarré de 6, on auroit le cube 216, pour le nombre des combinaisons entre trois dés; & s'il y avoit quatre dés, on auroit le quarré-quarré 1296, de même nombre 6, pour le nombre des combinaisons entre quatre dés, & ainsi de suite.

D'où il suit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35, pour faire une rasle déterminée avec deux dés en un coup. On connoitra par un semblable raisonnement, qu'on ne doit mettre que 3 contre 213, pour faire une rasle déterminée avec trois dés en un coup, & 6 contre 1290, ou 1 contre 215, avec quatre dés, & ainsi de suite: parce que des 216 hasards qui se trouvent entre trois dés, il y en a 3 pour celui qui tient le dé, puisque trois choses se peuvent combiner deux à deux en trois façons, & par conséquent 213 contraires à celui qui tient le dé, & que des 1296 hasards qui se trouvent entre quatre dés, il y en a six qui sont favorables à celui qui tient le dé, puisque quatre choses se combinent deux à deux en six façons, & par conséquent 1290 contraires à celui qui tient le dé.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 135

Mais si vous voulez sçavoir le parti de celui qui entreprendroit de faire une raffe quelconque du premier coup avec deux ou plusieurs dés, il ne sera pas difficile de connoître qu'il doit mettre 6 contre 30, ou 1 contre 5, avec deux dés; parce que si de 36 hasards qui se trouvent entre deux dés, on ôte 6 hasards, qui peuvent produire une raffe, il reste 30. On connoitra aussi aisément qu'avec trois dés il peut mettre 18 contre 198, ou 1 contre 11: parce que si de 216 hasard qui se rencontrent entre trois dés, on ôte 18 hasards qui peuvent produire une raffe, il reste 198, &c.

P R O B L E M E XIV.

*Plusieurs dés étant jettés, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.*

Si quelqu'un a jetté sur une table, par exemple, trois dés, que nous appellerons A, B, C, dites-lui d'ajouter tous les points de dessus, & ceux de dessous de deux dés seulement, tels qu'on voudra, comme des deux derniers B, C, puis de mettre à part le troisieme A, sans en changer l'assiette. Dites-lui ensuite de jeter de nouveau les deux mêmes dés B, C, d'ajouter à la somme précédente tous les points de dessus, & ceux de dessous de l'un de ces dés, comme du second C, pour avoir une seconde somme, & de mettre à part le premier B, proche du précédent A, sans en changer l'assiette. Enfin faites-lui jeter le dernier dé C, & dites lui d'ajouter à la seconde somme précédente le nombre des points de dessus, pour avoir une troisieme somme, que vous trouverez en cette sorte. Le troisieme dé C, ayant été mis près des deux autres

sans en changer la situation , approchez-vous de la table , comptez tous les points qui se trouveront au-dessus de ces trois dés , ajoutez à leur somme autant de fois 7 qu'il y a de dés , comme ici trois fois 7 , ou 21 , ( ce nombre 7 étant le nombre des points de deux faces opposées d'un dé , quand il est bien fait , ) la somme sera celle qu'on cherche.

Supposons qu'ayant jetté pour la premiere fois les trois dés A , B , C , il soit venu en dessus ces trois points 1 , 4 , 5 : ayant mis , par exemple , le premier 1 à part , faites ajouter à ces trois points , 1 , 4 , 5 , les deux 3 , 2 , qui se trouvent au-dessous des deux autres , dont les points de dessus sont 4 , 5 , pour avoir la premiere somme 15. Supposons maintenant que les deux mêmes dés étant jettés il vienne en dessus ces deux points 3 , 6 : celui qui a trois ayant été mis à part près de celui qui avoit 1 , faites ajouter ces deux points 3 , 6 , & encore 1 , qui se trouve au dessous du troisieme dé restant , qui a 6 au dessus ; la somme 10 étant ajoutée à 15 premiere somme trouvée , on aura cette seconde somme 25. Supposons enfin que ce troisieme dé étant jetté seul une troisieme fois , il vienne 6 en dessus , vous ferez mettre ce dé avec les autres , sans le changer , & ajouter le 6 à la seconde somme 25 , pour avoir cette troisieme somme 31 : vous devinerez cette derniere somme en ajoutant 21 , à la somme 10 des points 1 , 3 , 6 , qui se trouvent au-dessus des 3 dés restans dont vous vous ferez approché pour connoître cette somme 10 de leurs points 1 , 3 , 6.

### R E M A R Q U E.

Ce problème peut se résoudre avec plus de trois

dés, il ne faut qu'observer combien de fois on fait ajouter les points de deux faces opposées d'un dé, & retenir autant de fois 7, pour les ajouter, après que le dernier dé aura été jetté, à la somme des faces du dessus de tous les dés qu'on aura fait mettre à part. Si l'on avoit jetté quatre dés, par exemple, on trouveroit qu'en faisant la même chose qu'on vient de faire, on fait prendre six fois les points des deux faces opposées d'un dé, & qu'ainsi il faudroit ajouter 6 fois 7, ou 42 à la somme des points des faces de dessus des dés, dont on se seroit approché. De même on trouveroit que pour cinq dés, on auroit fait prendre dix fois les points des deux faces opposées d'un dé, & que par conséquent il faudroit ajouter 10 fois 7 ou 70 à la somme des faces de dessus des cinq dés dont on se seroit approché. Ce sera la même règle pour tel nombre de dés qu'on aura choisi.

Il faut prendre garde que les dés soient marqués, comme on l'a déjà dit, en sorte que les points des deux faces opposées étant ajoutés, fassent 7. La démonstration de ce problème n'est fondée que sur cette structure; car toutes les fois qu'on fait prendre les points des deux faces opposées, on est assuré que leur somme est 7. Donc puisqu'avec trois dés on fait prendre trois fois les points de deux faces opposées, c'est là même chose que de faire prendre 21. Par conséquent ajoutant 21 à tous les autres points qu'on assemble, il est évident qu'on a la somme de tous les points. Il en est de même pour tel autre nombre de dés qu'on aura fait jeter.

## PROBLEME XV.

*Deux dés étant jettés, trouver les points de dessus de chaque dé, sans les voir.*

**Q**uelqu'un ayant jetté deux dés sur une table, faites-lui ajouter 5 au double des points de dessus de l'un de ces deux dés, puis lui ayant fait multiplier la somme par le même nombre 5, dites-lui d'ajouter au produit le nombre des points de dessus du second dé. Enfin ayant demandé cette seconde somme, ôtez-en 25, quarré du même nombre 5 : le reste sera un nombre composé de deux figures, dont la premiere vers la droite, qui représente les dixaines, sera le nombre des points de dessus du premier dé, & la seconde vers la gauche qui représente les unités, sera le nombre des points de dessus du second dé.

Supposons que le nombre des points de dessus du premier dé soit 2, & que le nombre des points de dessus du second dé soit 3. Si on double 2, nombre des points de dessus du premier dé, & qu'au double 4 on ajoute 5, on aura 9, qui étant multiplié par le même nombre 5, donnera 45, auquel ajoutant 3, nombre des points de dessus du second dé, on aura 48, d'où ôtant 25, quarré du même nombre 5, il reste 23, dont la premiere figure 2 montre le nombre des points de dessus du premier dé, & l'autre figure 3 fait connoître le nombre des points de dessus du second dé.

*Autrement.*

Ou bien demandez à celui qui a jetté les deux dés, combien font ensemble les points de dessous,

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 139**

& de combien le nombre des points de dessous de l'un des dés surpasse le nombre des points de dessous de l'autre dé ; si cet excès est , par exemple , 1 , & que la somme de tous les points de dessous soit 9 , ajoutez ces deux nombres , 1 , 9 , & ôtez 10 , leur somme , de 14 : la moitié 2 , du reste 4 , sera le nombre des points de dessus de l'un des deux dés. Pour avoir le nombre des points de dessus de l'autre dé , au lieu d'ajouter l'excès 1 à la somme 9 , il le faut ôter , & ayant ôté de 14 le reste 8 , on aura ce second reste 6 dont la moitié 3 sera le nombre qu'on cherche.

*Encore autrement.*

Ou bien encore , dites à celui qui a jetté les deux dés, d'ajouter les points de dessus , & de vous dire leur somme , qui fera , par exemple , 5 . Dites-lui encore de multiplier le nombre des points de dessus d'un dé , par le nombre des points de dessous de l'autre dé , & de vous dire leur produit , que nous supposerons 6 . Par le moyen de ce produit & de la somme précédente 5 , vous trouverez le nombre des points de dessus de chaque dé en cette sorte. Multipliez la somme 5 par elle-même , pour avoir son quarré 25 , duquel vous ôterez 24 quadruple du produit 6 , & il reste 1 , dont vous prenez la racine quarrée , qui est aussi 1 , laquelle étant ajoutée & ôtée de la somme précédente 5 , donnera ces deux nombres , 6 , 4 , dont les moitiés , 3 , 2 , seront les nombres des points de dessus de chaque dé.

## PROBLEME XVI.

*Trois dés étant jettés , trouver les points de dessus de chaque dé sans les voir.*

**Q**uelqu'un ayant jetté trois dés sur une table ; faites les ranger en ligne droite l'un près de l'autre. Demandez la somme des points de dessous du premier & du second dé , qui sera , par exemple , 9 , celle des points de dessous du second & du troisieme dé , que nous supposons 5 ; enfin la somme des points de dessous du premier & du troisieme dé qui soit 6. Par le moyen de ces trois sommes ou nombres connus , 9 , 5 , 6 , on trouvera le nombre des points de dessus du premier dé : car en ôtant de 15 , somme du premier & du troisieme nombre , le second 5 , & en ôtant de 14 le reste 10 , on aura cet autre reste 4 , dont la moitié 2 sera le nombre des points de dessus du premier dé. Pour trouver le nombre des points de dessus du second dé , ôtez de 14 , somme des deux premiers nombres , 9 , 5 , le troisieme ; puis ôtez de 14 le reste 8 , pour avoir un second reste 6 , dont la moitié 3 sera le nombre des points de dessus du second dé. Enfin pour avoir le nombre des points de dessus du troisieme dé , ôtez de 11 , somme du second nombre 5 , & du troisieme 6 , le premier 9 ; ensuite ôtez de 14 le reste 2 , pour avoir un second reste 12 , dont la moitié 6 sera le nombre des points de dessus du troisieme dé.

*Autrement.*

Les trois dés ayant été jettés , faites doubler le nombre des points de l'un de ces dés , puis



vous ferez ajouter 5 à ce double , multiplier la somme par 5 , & ajouter 10 à ce produit. Faites ensuite ajouter à ce total , le nombre des points du second dé , & multiplier cette somme par 10. Enfin ayant ajouté à ce dernier produit le nombre des points du troisieme dé , vous demanderez la somme qui sera venue après toutes ces opérations. Vous en ôterez 350 , & les trois nombres qui resteront , marqueront le nombre des points de chaque dé ; en sorte que celui qui sera à la place des centaines , sera le nombre des points du premier dé ; celui qui sera à la place des dizaines , sera le nombre des points du second dé , & celui qui sera à la place des unités , sera le nombre des points du troisieme dé.

Si , par exemple , on amene ces trois nombres 2 , 3 , 6 , le double de 2 est 4 , auquel ajoutant 5 , il vient 9 , qui étant multiplié par 5 , donne 45 , auquel on ajoutera 10 , & l'on aura 55. Ensuite ayant ajouté 3 , nombre des points du second dé , à cette somme 55 , on aura 58 , qui étant multiplié par 10 , donnera 580. Enfin on ajoutera 6 , nombre des points du troisieme dé , à 580 la somme sera 586. Toutes ces opérations auront été faites en secret. Mais lorsque vous sçauvez que le total est 586 , vous en ôterez 350 , il restera 236. Chacun de ces chiffres pris de suite , marque le nombres des points de chaque dé , 2 , 3 , 6.

### R E M A R Q U E.

On vient de voir que quand on a jetté trois dés , il falloit ôter 350 de la somme demandée & connue ; mais si l'on avoit jetté quatre dés , il faudroit continuer à faire la même chose pour le qua-

trieme dé, que ce qu'on a fait pour les trois autres, & ôter de la somme demandée 3500. Il en est de même pour un plus grand nombre de dés, il faudra ôter de la somme demandée le nombre 350, augmenté d'autant de zeros qu'il y aura de dés qui surpasseront les trois qu'on a d'abord jetté. Par exemple, s'il y avoit quatre dés, dont les points fussent 3, 5, 8, 2, ayant fait doubler le 3, point du premier dé, il viendra 6, auquel faisant ajouter 5, la somme fera 11, qui multipliée par 5, donne 55 : & faisant ajouter 10 à ce produit, on aura 65. Ensuite on fera ajouter à 65 le 5, point du second dé, & l'on aura 70, qui multiplié par 10, donnera 700, auquel on fera ajouter le 8, point du troisieme dé, & la somme fera 708 : cette somme ayant été multipliée par 10, il viendra 7080. On fera ajouter le 2, point du quatrieme dé à ce produit, on aura 7082. Enfin après avoir connu cette somme 7082, on en ôtera 3500, & le reste 3582 exprimera par ordre les points de chaque dé, 3, 5, 8, 2.

On voit que les points 8, 2, des deux derniers dés, n'ont point été changés par les opérations ; c'est pourquoi afin de mieux couvrir l'artifice, il seroit à propos de faire ajouter à la somme totale 7082 quelque nombre, comme 12, l'on auroit 7094 : puis ayant demandé cette derniere somme, on en ôteroit 3512, & il resteroit le même nombre qu'auparavant 3582.

La méthode qu'on vient de proposer pour deviner les points de plusieurs dés jettés, peut très-bien servir à deviner plusieurs nombres pensés. Ainsi on peut l'ajouter à toutes les diverses manieres qu'on va enseigner dans les problèmes suivans.

## PROBLEME XVII.

*Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.*

I.

**F**AITES multiplier par lui-même le nombre pensé ; dites ensuite d'ajouter à ce quarré le double du nombre pensé ; puis faites ajouter l'unité à la somme du quarré & du double : enfin ayant demandé quelle est cette somme , vous en tirerez la racine quarrée , d'où ayant ôté l'unité , il restera le nombre pensé.

Comme si quelqu'un a pensé 6 , le quarré de ce nombre est 36 , auquel si on ajoute 12 double de 6 , on aura 48 : ce nombre augmenté de l'unité , donnera 49. On tirera la racine quarrée de 49 , qui est 7 , ôtant 1 de 7 , on aura 6 pour le nombre pensé.

II.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé , faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition , ajoutez-y 3 ; la troisieme partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on en ôte 1 , il restera 4 , dont le double 8 étant diminué de 1 , & le reste 7 étant augmenté du nombre pensé 5 , on a cette somme 12 , à laquelle ajoutant 3 , on a cette autre somme 15 , dont la troisieme partie 5 est le nombre pensé.

III.

On bien après avoir fait ôter 1 du nombre pensé,

faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de ce triple, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, vous y ajouterez 4 ; la quatrième partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 16, à laquelle ajoutant 4, on a cette autre somme 20, dont la quatrième partie 5 est le nombre pensé.

## I V.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin demandez le nombre qui vient de cette dernière addition, dont vous ôterez 3, la troisième partie du reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 18, de laquelle ôtant 3, il restera 15, dont la troisième partie 5 est le nombre pensé.

## V.

Ou bien après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme ; après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette dernière addition, vous en ôterez 4 ; la quatrième partie du reste sera le nombre pensé.

Comme

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on y ajoute 1 , on aura 6 , dont le triple 18 étant augmenté de 1 , & la somme 19 étant augmentée du nombre pensé 5 , on a cette somme 24 , de laquelle ôtant 4 , il restera 20 , dont la quatrième partie 5 est le nombre pensé.

V I.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé , faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double , faites ôter du reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette dernière soustraction , vous y ajouterez 3 , la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on en ôte 1 , il restera 4 ; dont le double 8 étant diminué de 1 , & le reste 7 étant encore diminué du nombre pensé 5 , il reste 2 : auquel ajoutant 3 , la somme 5 est le nombre pensé.

V I I.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé , faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double , faites ôter de la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette soustraction , vous en ôterez 3 , le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on y ajoute 1 , on aura 6 , dont le double 12 étant augmenté de 1 , & la somme 13 étant diminuée du nombre pensé 5 , il restera 8 , dont ôtant 3 , le reste 5 est le nombre pensé.

V I I I.

Après avoir fait ôter 1 du nombre pensé , faites tripler le reste , & après avoir aussi fait ôter 1 de

ce triple , faites ôter du reste le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette dernière soustraction , vous ajouterez 4 ; la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on en ôte 1 , il restera 4 , dont le triple 12 étant diminué de 1 , & le reste 11 étant encore diminué de 10 , double du nombre pensé , il reste 1 , auquel ajoutant 4 , la somme 5 est le nombre pensé.

## I X.

Après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé , faites tripler la somme , & après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple , faites ôter de la somme le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste , vous en ôterez 4 , le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on y ajoute 1 , on aura 6 , dont le triple 18 étant augmenté de 1 , & la somme 19 étant diminuée de 10 , double du nombre pensé 5 , on a ce reste 9 , dont ôtant 4 , le reste 5 est le nombre pensé.

## X.

Dites à celui qui aura pensé un nombre , de multiplier ce nombre par 3 , & de prendre la moitié de ce triple , au cas qu'il le puisse faire sans reste , s'il ne peut le faire sans reste , vous lui ferez ajouter 1 à ce triple , pour en pouvoir prendre justement la moitié , que vous ferez encore multiplier par 3 . Après quoi vous demanderez combien il y a de fois 9 dans ce dernier triple , & vous prendrez autant de fois 2 qu'il y aura de fois 9 , pour le nombre qui aura été pensé . Mais vous vous souviendrez d'ajouter 1 , si vous l'avez fait ajou-

ter auparavant, lorsque la division par 2 n'aura pu se faire sans reste.

Comme si l'on a pensé 5, son triple est 15, dont on ne peut prendre exactement la moitié; c'est pourquoi on y ajoutera 1, & l'on aura 16, dont la moitié 8 étant multipliée encore par 3, on a ce produit 24, dans lequel 9 est compris 2 fois: donc prenant 2 fois 2, on a ce nombre 4, auquel ajoutant 1, qu'on a fait ajouter auparavant, la somme 5 est le nombre pensé.

Remarquez que le nombre pensé sera 1, lorsque le nombre 9 ne sera point contenu dans le dernier triple.

Pour ôter les 9 autant de fois qu'il se pourra, faites ôter 27, ou 36, ou 72, &c. si ces nombres y sont contenus, puis faites ôter 9 du reste, si cela se peut, & ainsi autant de fois qu'il sera possible. C'est une maniere différente de celle qu'on vient d'enseigner.

## XI.

Faites ajouter & ôter 1 du nombre pensé, pour avoir une somme & un reste que vous ferez multiplier ensemble, & demandez le produit qui vient de la multiplication: si vous ajoutez 1 à ce produit, la racine quarrée de la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a la somme 6, & ôtant 1 de 5, on a le reste 4; puis multipliant la somme 6 par le reste 4, on a un produit 24, auquel ajoutant 1, la racine quarrée 5 de la somme 25 est le nombre pensé.

## XII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites

multiplier la somme par le nombre pensé, & faites ôter du produit le même nombre pensé : enfin demandez le nombre qui restera de cette soustraction, la racine quarrée de ce reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a 6, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, donne 30, d'où ôtant le même nombre pensé 5, il reste 25, dont la racine quarrée 5 est le nombre pensé.

## XIII.

Ou bien ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites multiplier le reste par le nombre pensé ; puis faites ajouter au produit le même nombre pensé : enfin demandez la somme qui vient de cette addition ; la racine quarrée de cette somme sera le nombre pensé.

Comme l'on a pensé 5, ôtant 1 de 5, il reste 4, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, donne 20, auquel ajoutant le même nombre pensé 5, on a 25, dont la racine quarrée 5 est le nombre pensé.

## XIV.

Ayant fait ajouter 2 au nombre pensé, faites ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 12 ; vous ferez encore ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 320 : enfin vous demanderez le reste, dont les figures significatives vers la gauche, en retranchant les deux zero, qui se rencontrent toujours à la droite, représenteront le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en y ajoutant 2, on a 7, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 70,



auquel si l'on ajoute 12, on a 82; puis ajoutant encore un 0 vers la droite, on a 820, d'où ôtant 320, il reste 500, dont retranchant les deux zeros à la droite, le reste 5 est le nombre pensé.

### XV.

Ayant fait ajouter 5 au double du nombre pensé, faites ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 20: puis vous ferez encore ajouter à la somme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 700; enfin vous demanderez le reste, dont vous retrancherez les deux zeros, qui se rencontreront toujours à la droite, & la moitié du nombre qui restera vers la gauche, sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ajoutant 5 à son double 10, on a 15, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 150, auquel si l'on ajoute 20, on a 170; puis ajoutant à ce nombre un 0 vers la droite, on a 1700, d'où ôtant 700, on a 1000, dont retranchant deux zeros à la droite, la moitié 5 du reste 10, est le nombre pensé.

### XVI.

Ces deux dernières méthodes ne sont pas extrêmement subtiles, parce que le dernier nombre étant connu, il est aisé, en rétrogradant, de connoître les autres nombres, & par conséquent le nombre pensé. C'est pourquoi il vaudra mieux se servir des deux méthodes suivantes, dont le secret est plus caché.

Ayant fait ajouter 1 au triple du nombre pensé, faite multiplier la somme par 3; puis ayant fait

ajouter à ce triple le nombre pensé, demandez le nombre qui viendra de cette addition; car si vous ôtez 3 de cette somme, & que du reste vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à son triple 15, on a 16, dont le triple est 48, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 53, d'où ôtant 3, & retranchant du reste 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

## XVII.

Ayant fait ôter 1 du triple du nombre pensé, faites multiplier le reste par 3; puis ayant fait ajouter au produit le nombre pensé, demandez le nombre qui vient de cette addition; car si vous ajoutez 3 à cette somme, & que de cette seconde somme vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ôtant 1 de son triple 15, il reste 14, dont le triple est 42, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 47, auquel ajoutant 3, & retranchant de la somme 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

## COROLLAIRE.

Il suit de ces deux dernières méthodes, que, si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se terminera par 3. Comme si on ajoute l'unité au triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au

triple 57 de la somme 19, on a cette seconde somme 63, qui se termine par 3.

Il s'ensuit aussi que si on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple du reste, on aura une somme qui se terminera par 7. Comme si on ôte l'unité du triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6, au triple 51 du reste 17, on a cette somme 57, qui se termine par 7.

Enfin il s'ensuit que ce problème double est impossible; trouver un nombre tel, que si on ajoute l'unité à son triple, ou qu'on ôte l'unité de son triple, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, ou du reste, la somme soit un carré parfait, parce que tout nombre qui finit par 3, ou par 7, ne peut avoir une racine carrée exacte, comme on a dit au problème VIII, p. 19. Voyez le problème suivant.

### PROBLEME XVIII.

*Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations, sans lui rien demander.*

**A**yant fait penser un nombre à volonté, faites ajouter à son double un nombre pair, tel qu'il vous plaira, par exemple, 8; puis faites ôter de la moitié de la somme le nombre pensé: ce qui restera sera la moitié du nombre pair que vous aviez fait ajouter auparavant; sçavoir, 4. Ainsi vous direz hardiment qu'il reste 4; ce qui surprendra agréablement ceux qui n'en verront pas d'abord la raison, quoique la démonstration en soit facile.

C'est pourquoi pour sçavoir adroitement le nombre qui aura été pensé, faites semblant d'ignorer le reste 4, & faites-le ôter du nombre pensé, si le

nombre pensé est plus grand ; ou faites-en ôter le nombre pensé , si le nombre pensé est plus petit ; puis demandez le reste. Si vous ajoutez ce reste à la moitié 4 du nombre 8 , que vous aviez fait ajouter au nombre pensé , si le nombre pensé a été trouvé plus grand que cette moitié 4 , ou si vous ôtez ce reste de la même moitié 4 , si le nombre pensé a été trouvé plus petit que cette moitié 4 , vous aurez le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 , & qu'on ajoute 8 à son double 10 , on aura 18 , dont la moitié est 9 , d'où ôtant le nombre pensé 5 , il reste 4 , moitié de 8 , nombre ajouté , & si l'on ôte cette moitié 4 , du nombre pensé 5 qui est plus grand , il restera 1 ; ce reste étant ajouté à la même moitié 4 , parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé plus grand que cette moitié 4 , on aura la somme 5 , qui est le nombre pensé.

De même , si on ajoute 12 au double 10 du nombre pensé 5 , on aura 22 , dont la moitié est 11 , d'où ôtant le nombre pensé 5 , il reste 6 , moitié du nombre ajouté 12 ; & si de cette moitié 6 on ôte le nombre pensé 5 , qui est le plus petit , il restera 1 ; ce reste étant ôté de la même moitié 6 , parce que le nombre pensé 5 , s'est trouvé moindre que cette moitié 6 , on aura un autre reste 5 , qui est le nombre pensé.

*Autrement.*

Faites ôter du double du nombre pensé un nombre pair moindre & tel qu'il vous plaira , par exemple , 4 : faites encore ôter la moitié du reste du nombre pensé , le reste sera 2 , moitié du nombre ôté 4 : c'est pourquoi pour trouver le nombre pensé , faites ajouter à cette moitié 2 le nom-

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 153**

bre pensé, & demandez la somme qui soit, par exemple, 7, dont si vous ôtez la même moitié 2, le reste 5 sera le nombre pensé.

*Autrement.*

On peut encore trouver plus facilement le nombre que quelqu'un aura pensé, en lui faisant ajouter un nombre à volonté, & en faisant multiplier la somme par le nombre pensé. Ensuite ayant fait ôter du produit le quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ajouter, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute, par exemple, 4, on aura 9, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, on a 45, d'où ôtant le quarré 25 du nombre pensé 5, & le reste 20 étant divisé par le nombre 4, qui a été ajouté auparavant, le quotient donne 5 pour le nombre pensé.

*Autrement.*

On bien faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira : faites multiplier le reste par le nombre pensé, faites ôter ce produit du quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ôter du nombre pensé, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, produit 10. Ce nombre 10 étant ôté de 25, quarré du nombre pensé 5, il reste 15, qui étant divisé par le nombre 3, qui a été ôté du nombre pensé, donne pour quotient 5, qui est le nombre pensé.

*Autrement.*

La maniere la plus facile de toutes pour deviner le nombre que quelqu'un aura pensé, est la suivante. Faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira, & mettez le reste à part. Faites ajouter le même nombre au nombre pensé, & ajouter à la somme le reste précédent, pour avoir une seconde somme, que vous demanderez; la moitié de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2; si l'on ajoute le même nombre 3 au nombre pensé 5, on aura 8, auquel ajoutant le précédent reste 2, on a 10, dont la moitié 5 est le nombre pensé.

## P R O B L E M E X I X.

*Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.*

**F**aites ajouter au nombre pensé sa moitié, s'il est pair, ou sa plus grande moitié, s'il est impair, pour avoir une première somme. Faites aussi ajouter à cette somme sa moitié, ou sa plus grande moitié, selon qu'elle fera un nombre pair ou impair, pour avoir une seconde somme, dont vous ferez ôter le double du nombre pensé; ensuite faites prendre la moitié du reste, ou sa plus petite moitié, au cas que ce reste soit un nombre impair, continuez à faire prendre la moitié de la moitié, jusqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait, remarquez combien de subdivisions on aura faites, & pour la première division retenez 2, pour la seconde 4, pour la troisième 8, & ainsi des autres.

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.** 155

en proportion double. Observez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parce qu'en prenant cette plus petite moitié, il reste toujours 1, & qu'il faut seulement retenir 1, lorsqu'on n'aura pu faire aucune soustraction; car ainsi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés, alors le quadruple de ce nombre sera le nombre pensé, au cas qu'il n'ait point fallu prendre au commencement la plus grande moitié, ce qui arrivera seulement lorsque le nombre pensé sera parement pair, ou divisible par 4; autrement on ôtera 3 de ce quadruple si à la première division l'on a pris la plus grande moitié, ou bien seulement 2, si à la seconde division l'on a pris la plus grande moitié, ou bien enfin 5, si à chacune des deux divisions on a pris la plus grande moitié, & alors le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 4, en lui ajoutant sa moitié 1, on a 6, auquel si l'on ajoute pareillement sa moitié 3, on a 9, d'où ôtant le double 8 du nombre pensé 4, il reste 1, dont on ne sçauroit prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité; c'est pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 est le nombre pensé.

Si l'on a pensé 5, en lui ajoutant sa plus grande moitié 3, on a 8, auquel si on ajoute sa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre pensé 5, il reste 2, dont la moitié est 1: & comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on est parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une soustraction. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parce que dans la première division on a pris la plus grande moitié, le reste 5 est le nombre pensé.

Si le nombre pensé est 6 , en lui ajoutant sa moitié 3 , on a 9 , auquel si l'on ajoute sa plus grande moitié 5 , on a 14 , d'où ôtant le double 12 du nombre pensé 6 , il reste 2 , dont la moitié est 1 : comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié , parce qu'on est parvenu à l'unité , on retiendra 2 , parce qu'il y a une soufdivision. Si de 8 , quadruple de ce nombre retenu 2 , on ôte 2 , parce que dans la seconde division , l'on a pris la plus grande moitié , le reste 6 est le nombre pensé.

Si l'on a pensé 7 , en lui ajoutant sa plus grande moitié 4 , on a 11 , auquel si l'on ajoute pareillement sa plus grande moitié 6 , on a 17 ; d'où ôtant le double 14 du nombre pensé 7 , il reste 3 , dont la plus petite moitié est 1 , & comme l'on ne sçauroit plus prendre la moitié , parce qu'on est parvenu à l'unité , on retiendra 2 , auquel on ajoutera 1 , parce qu'on a pris la plus petite moitié ; ainsi on aura 3 , dont le quadruple est 12 , duquel ôtant 5 , parce que dans la premiere & dans la seconde division l'on a pris la plus grande moitié , le reste 7 est le nombre pensé. Ainsi des autres.

## PROBLEME XX.

*Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.*

I.

**A**Yant fait ajouter ensemble les deux nombres pensés , pour avoir leur somme , & ayant fait ôter le plus petit du plus grand , pour avoir leur différence , faites multiplier la somme par la différence , & ajouter au produit le quarré du plus petit nombre pensé. Alors demandez le nombre qui vient de cette addition , & prenez-en la racine



quarrée qui sera le plus grand des deux nombres pensés. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le quarré du plus petit nombre pensé, faites ôter ce produit du quarré du plus grand nombre pensé, & demandez le nombre qui restera : la racine quarrée de ce reste sera le plus petit nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 3 & 5, en multipliant leur somme 8 par leur différence 2, on a le produit 16, auquel ajoutant le quarré 9 du plus petit nombre pensé 3, on a 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand des deux nombres pensés : & ôtant le même produit 16 de 25, quarré du plus grand nombre pensé 5, il reste 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

I I.

Faites ajouter à la somme des deux nombres pensés leur différence, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; la moitié de ce nombre sera le plus grand des deux nombres pensés. Pour avoir le plus petit, faites ôter la différence des deux nombres pensés de leur somme, & demandez le nombre qui restera ; la moitié de ce reste sera le plus petit nombre pensé.

Comme dans cet exemple, en ajoutant la différence 2 des deux nombres pensés à leur somme 8, on a 10, dont la moitié 5 est le plus grand des deux nombres pensés ; & en ôtant la différence 2 de la somme 8, il reste 6, dont la moitié 3 est le plus petit nombre pensé.

I I I.

Faites multiplier la somme de deux nombres pensés par elle-même, pour avoir son quarré ;

puis ayant fait ajouter au plus petit des deux nombres pensés, le double du plus grand, & ayant fait multiplier la somme par le plus petit, faites ôter le produit du précédent carré, & demandez le reste; la racine carrée de ce reste sera le plus grand des deux nombres pensés. Pour avoir le plus petit, ayant fait ajouter au plus grand le double du plus petit, & ayant fait multiplier la somme par le plus grand, faites ôter le produit du précédent carré, & demandez le reste dont la racine carrée sera le plus petit nombre pensé.

Comme dans cet exemple, où l'on a supposé que les deux nombres pensés sont 3 & 5, leur somme est 8, qui étant multiplié par soi-même, donne 64 pour son carré. En ajoutant au plus petit nombre pensé 3 le double 10 du plus grand 5, on a 13, qui étant multiplié par le plus petit 3, donne 39; ce produit 39 étant ôté du précédent carré 64, il reste 25, dont la racine carrée 5 est le plus grand des deux nombres pensés. En ajoutant au plus grand nombre pensé 5 le double 6 du plus petit 3, on a 11, qui étant multiplié par le plus grand 5 produit 55; ce produit 55 étant ôté du précédent carré 64, il reste 9, dont la racine carrée 3 est le plus petit nombre pensé.

## I V.

Faites multiplier ensemble les deux nombres pensés, pour avoir leur produit. Faites aussi multiplier la somme des deux mêmes nombres par celui que vous voulez trouver, & faites ôter de ce produit le produit des deux nombres: après quoi vous demanderez le reste, dont la racine carrée sera le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, si l'on multiplie en-

semble les deux nombres pensés 3, 5, on aura leur produit 15, & si l'on multiplie leur somme 8 par le plus grand nombre 5, si vous le voulez trouver, on a ce produit 40, d'où ôtant le précédent produit 15, il reste 25, dont la racine quarrée 5 est le nombre qu'on cherche.

V.

Après avoir fait multiplier ensemble les deux nombres pensés, pour avoir leur produit, faites multiplier leur différence par le nombre que vous cherchez; & faites ajouter à ce produit, le produit des deux nombres, si vous demandez le plus grand nombre, ou bien faites ôter ce produit du produit des deux nombres, si vous demandez le plus petit: alors si vous demandez le nombre qui vient de cette addition, ou de cette soustraction, & que vous en preniez la racine quarrée, vous aurez le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, après avoir multiplié ensemble les deux nombre pensés 3, 5, pour avoir leur produit 15, si l'on fait multiplier leur différence 2, par le plus grand nombre 5, & qu'on ajoute le produit 10 au premier produit 15, on aura 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand nombre. De même, si l'on multiplie leur différence 2 par le plus petit nombre 3, & qu'on ôte le produit 6 du premier 15, il restera 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

VI.

Lorsque le plus petit des deux nombres pensés ne passera pas 9, on les pourra deviner très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au triple du plus grand des deux nombres pensés, fai-

tes encore ajouter au triple de cette somme les deux nombres pensés, & demandez le nombre qui vient de cette addition; si vous en ôtez 3, la première figure du reste vers la droite sera le plus petit nombre pensé, & ce qui restera vers la gauche, sera le plus grand.

Comme dans l'exemple qui vient d'être proposé, où les deux nombres sont 3, 5, ajoutant 1 à 15, triple du plus grand 5, on a 16, & ajoutant à 48 triple de cette somme 16, les deux nombres pensés 3, 5, ou 8, on a 56, d'où ôtant 3, il reste 53, dont la première figure 3 vers la droite, est le plus petit nombre pensé, & l'autre figure 5, qui reste vers la gauche, est le plus grand.

## P R O B L E M E X X I.

*Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.*

### I

**S**I la multitude des nombres pensés est impaire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisième, du troisième & du quatrième, & ainsi de suite jusqu'à la somme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du premier & du dernier soit la dernière, ôtez toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs de toutes celles qui seront dans les lieux impairs, & la moitié du reste sera le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la première somme, il restera le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme, le reste sera le troisième nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme

Comme si l'on a pensé ces cinq nombres, 2, 4, 5, 7, 8, les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, & ainsi des autres jusqu'à la somme du premier & du cinquieme sont, 6, 9, 12, 15, 10: ôtant 24, somme des deux 9, 15, qui sont dans les lieux pairs de la somme 28 des trois 6, 12, 10, qui sont dans les lieux impairs, il reste 4, dont la moitié 2 est le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme 6, le reste 4 est le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme 9, il reste 5 pour le troisieme nombre pensé, &c.

II.

Si la multitude des nombres pensés est paire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, du troisieme & du quatrieme, & ainsi de suite jusqu'à la somme du second & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du second & du dernier soit la derniere, ôtez de toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs toutes celles qui seront dans les lieux impairs, excepté la premiere: la moitié du reste fera le second nombre pensé, par le moyen duquel il sera facile de trouver les autres; car si on l'ôte de la premiere somme, il restera le premier nombre pensé; & si on l'ôte de la seconde somme, le reste sera le troisieme nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisieme somme, on aura pour reste le quatrieme nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme si l'on a pensé ces six nombres, 2, 4, 5, 7, 8, 9, les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, du troisieme & du quatrieme, ainsi de suite jusqu'à la somme du second

& du sixieme, seront 6, 9, 12, 15, 17, 13 : ôtant 29, somme de la troisieme 12, & de la cinquieme 17, qui sont dans les lieux impairs, en omettant la premiere, de 37, somme des trois 9, 15, 13, qui sont dans les lieux pairs, il reste 8, dont la moitié 4 est le second nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme 6, le reste 2 est le premier nombre pensé; & étant ôté de la seconde somme 9, le reste 5 est le troisieme nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisieme somme 12, il reste 7 pour le quatrieme nombre pensé, & ainsi de suite.

## I I I.

Lorsque chacun des nombres pensés ne sera composé que d'une figure, on les pourra trouver très-facilement en cette sorte. Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre pensé, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le second nombre pensé. S'il y a un troisieme nombre, ayant fait pareillement ajouter 1 au double de la somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre pensé. De même, s'il y a un troisieme nombre, ayant fait aussi ajouter 1 au double de la derniere somme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre pensé, & ainsi de suite, s'il y a davantage de nombres pensés. Après cela demandez le nombre qui vient de l'addition du dernier nombre pensé, & ôtez-en 5 pour deux nombres pensés, 55 pour trois nombres pensés 555, pour quatre nombres pensés, & ainsi de suite : alors la premiere figure du reste, vers la gauche, sera le premier nombre pensé; la suivante en allant vers la droite, sera le second nom-

## PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 183

bre pensé, & ainsi de suite jusqu'à la dernière figure vers la droite qui représentera le dernier nombre pensé.

Comme si l'on a pensé ces quatre nombres 3, 4, 6, 9, en ajoutant 1 au double 6 du premier nombre pensé, 3 & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le second nombre pensé 4, on a 39, dont le double est 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le troisième nombre pensé 6, on a 401, dont le double est 802, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 803 par 5, il vient 4015, auquel ajoutant le quatrième nombre pensé 9, & ôtant la somme 4024 ce nombre 555, il reste 3469, dont les quatre figures sont les quatre nombres pensés.

### I V.

On peut encore résoudre très-facilement le cas précédent par cette méthode. Ayant fait ôter 1 du double du premier nombre pensé, & ayant fait multiplier le reste par 5, faites ajouter au produit le second nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés, autrement faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme; & ayant fait pareillement ôter 1 du double de cette seconde somme, faites aussi multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le troisième nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés; autrement il faudra, comme auparavant, faire ajouter 5 à cette somme, pour avoir une autre somme; & ayant fait de la même façon ôter 1 du double de cette autre somme, faites encore multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le qua-

trieme nombre pensé, & si ce quatrieme nombre est le dernier, demandez la somme, à laquelle si vous ajoutez 4, vous aurez une derniere somme, dont les figures représenteront comme auparavant les nombres pensés.

Comme dans la supposition que nous venons de faire de ces quatre nombres pensés 3, 4, 6, 9, en ôtant 1 du double 6 du premier nombre pensé 3, & multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le second nombre pensé 4, on a cette somme 29, à laquelle si l'on ajoute 5 on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le troisieme nombre pensé 6, on a cette somme 341, à laquelle ajoutant 5, on a cette autre somme 346, dont le double 692, étant diminué de 1, & le reste 691, étant multiplié par 5, on a 3455, auquel ajoutant le quatrieme nombre pensé 9, on a cette somme 3464, à laquelle ajoutant 5, on a cette derniere somme 3469, dont les quatre figures représentent les quatre nombres pensés.

## PROBLEME XXII.

*Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles, & un nombre impair en l'autre main; deviner en quelle main est le nombre pair.*

**F**Aites multiplier le nombre de la main droite, par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair, aussi tel qu'il vous plaira, comme par 3; puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, faites prendre la moitié de leur somme.



Si cette moitié est juste , en sorte que la somme soit un nombre pair , vous connoîtrez que le nombre de la main droite , qui a été multiplié par un nombre pair , est impair , & par conséquent que celui de la main gauche qui a été multiplié par un nombre impair , est pair. Il arrivera tout le contraire , lorsque la moitié de la somme ne sera pas juste , c'est-à-dire , quand cette somme sera un nombre impair ; car dans ce cas le nombre de la main droite , qui a été multiplié par un nombre pair , sera pair , & celui de la main gauche , qui a été multiplié par un nombre impair , sera aussi impair.

Comme si dans la main droite il y a 9 pistoles , & 8 en la gauche , en multipliant le nombre 9 de la droite par 2 , & le nombre 8 de la gauche par 3 , & ajoutant ensemble les deux produits 18 , 24 , on aura la somme 42 , qui étant un nombre pair , fait connoître que le nombre impair 9 , qui a été multiplié par le nombre pair 2 , est en la main droite , & par conséquent le nombre pair 8 dans la gauche.

Mais si dans la main droite il y a 10 pistoles , & 7 en la gauche , en multipliant le nombre 10 de la droite par 2 , & le nombre 7 de la gauche par 3 , & en ajoutant ensemble les deux produits 20 , 21 , on aura leur somme 41 , laquelle étant un nombre impair , fait connoître que le nombre pair 10 , qui a été multiplié par le nombre pair 2 , est en la main droite , & par conséquent le nombre impair 7 dans la main gauche. C'est par le moyen de ce problème qu'on peut résoudre la question suivante.

## REMARQUE.

On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même personne, on peut supposer que deux personnes auront pris l'un le nombre pair des pistoles, & l'autre le nombre impair. On fera à l'égard de ces deux personnes ce qu'on a fait à l'égard des deux mains.

## QUESTION.

*Une personne tenant une piece d'or dans une main, & une piece d'argent en l'autre, trouver en quelle main est la piece d'or, & en quelle main est la piece d'argent.*

**A**près avoir dit qu'on donne secretement à l'or une certaine valeur, qui soit un nombre pair, comme 8, & à l'argent une certaine valeur qui soit un nombre impair, comme 5, faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair quelconque, comme par 3. Puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, demandez si leur somme est un nombre pair ou impair. Vous sçauvez que le nombre est pair, en demandant si on peut prendre la moitié; & qu'il est impair, si on vous répond qu'on n'en peut pas prendre la moitié. Si cette somme est un nombre impair, l'or sera dans la main droite, & l'argent dans la gauche; & tout au contraire, si elle est un nombre pair, l'or sera dans la main gauche, & l'argent en la droite.

## PROBLÈME XXIII.

*Trouver deux nombres dont on connoît la raison & la différence.*

I.

**P**our trouver deux nombres dont le premier soit au second, par exemple, comme 5 est à 2, & dont la différence, ou l'excès du plus grand sur le plus petit, soit, par exemple, 12; multipliez cette différence 12, par le plus petit terme 2 de la raison donnée, & divisez le produit 24, par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raison donnée; le quotient 8 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel ajoutant la différence donnée 12, la somme 20 sera le plus grand.

II.

Ou bien multipliez la différence donnée 12 par 5 le plus grand nombre de la raison donnée, & divisez le produit 60 par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raison donnée; le quotient 20 sera le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant la différence donnée : 2, le reste 8 sera le plus petit, comme auparavant.

III.

Ou bien encore multipliez chacun des deux termes 5, 2, de la raison donnée, par la différence donnée 12, & divisez chacun des deux produits 60, 24, par la différence 3 des deux mêmes termes 5, 2; les quotiens 20, 8, seront les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant. Par

le moyen de ce problème , on peut aisément résoudre la question suivante.

### Q U E S T I O N .

*Quelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoie que dans l'autre , deviner combien il y-en a en chaque main.*

**F**Aites mettre quelques pieces de la main gauche dans la main droite , par exemple , deux , en sorte qu'il y ait quatre pieces plus dans la main droite que dans la gauche ; & demandez la raison du nombre des pieces de la main droite au nombre des pieces de la main gauche , qui soit , par exemple , égale à celle de 5 à 3 . Alors il faudra multiplier la différence 4 du nombre des pieces d'une main au nombre des pieces de l'autre , par le plus petit terme 3 de la raison donnée , & diviser le produit 12 , par la différence 2 des deux termes 5 , 3 , de la même raison donnée , & le quotient 6 sera le nombre des pieces de la main gauche , auquel ajoutant la différence 4 des deux nombres des pieces qui sont en chaque main , on aura 10 pour le nombre des pieces de la main droite , auquel si l'on ajoute le nombre 6 des pieces de la main gauche , on aura 16 pieces en tout , dont la moitié 8 fait connoître qu'au commencement il y avoit 8 pieces de monnoie dans chaque main .



## PROBLEME XXIV.

## QUESTION I.

*Une personne ayant pris autant de jettons, ou pieces de monnoie, dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.*

**D**ites-lui de transporter de la main droite, par exemple, dans la gauche, un certain nombre de jettons, qui soit au-dessous de celui qu'il a dans l'une des mains. Dites-lui encore que de la main gauche, où il a mis ce nombre de jettons, il en transporte dans la droite autant qu'il y en étoit resté. Le nombre des jettons, qui sera dans la main gauche, sera double du nombre qu'on a ordonné d'y transporter. Si vous demandez donc de combien les jettons qui sont dans la main gauche, surpassent ceux qui sont dans la droite, vous connoîtrez combien il y a de jettons dans cette main droite, ainsi il n'y aura plus qu'à ajouter les jettons qui sont dans les deux mains, pour sçavoir combien il y en a en tout.

Si on avoit pris dans chaque main 12 jettons, & que vous en eussiez fait transporter 7 de la main droite dans la gauche, il faudroit faire passer de la main gauche dans la droite, autant qu'il en étoit resté dans cette main droite, c'est-à-dire, cinq jettons. Vous seriez assuré, pour lors, qu'il y auroit dans la main gauche, 14 jettons, qui est le double de 7, que vous aviez ordonné d'y transporter. Alors vous demanderez de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite, on vous répondra qu'il y en a quatre de plus dans celle-ci que dans l'autre : ayant

donc ôté 4 de 14, il restera 10 que vous ajouterez à 14. La somme 24 est le total des jettons qu'on avoit pris.

**I. REMARQUE.**

Au lieu de demander de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite, on peut demander de combien le nombre des jettons de la main gauche surpasse celui qu'on avoit pris au commencement, qu'on suppose être 12, ou de combien le nombre des jettons de la main droite est plus petit que celui qu'on avoit pris au commencement. Par ce moyen on connoîtroit que le nombre des jettons de la main droite étoit 10, qu'il faudroit ajouter à 14, pour avoir la somme 24.

**II. REMARQUE.**

On a donné dans le problème XVII plusieurs manieres de deviner un nombre que quelqu'un aura pensé, en voici encore une autre qu'on peut proposer sous ce titre.

*Deviner combien une personne aura de jettons ou de pieces de monnoie dans la main.*

**F**Aites multiplier le nombre des jettons par 3, ce triple sera pair ou impair.

I.

Si ce triple est pair, il en faudra prendre la moitié, & faire encore multiplier cette moitié par 3 : ce second triple sera pair ou impair.

II.

Si ce second triple est pair, il en faut faire

prendre la moitié , puis demandez combien cette moitié contient de fois 9. Sçachant combien cette moitié contient de fois 9 , vous prendrez autant de fois 4 qu'il y a de fois 9 , sans vous embarrasser s'il y a du surplus ; le produit sera le nombre des jettons qu'on tiendra dans la main.

*Exemple où le premier & le second triple sont pairs.*

Si on a pensé 8 , ou qu'on ait pris 8 jettons , il faut faire multiplier 8 par 3 , le produit est 24 , qui est pair : faites prendre la moitié de 24 , qui est 12 , que vous ferez encore multiplier par 3. Ce second triple est 36 , qui est aussi pair , sa moitié est 18. Demandez combien cette moitié 18 , que vous ne sçavez point , contient de fois 9 ; on vous répondra qu'elle contient 2 fois 9 : prenez donc 2 fois 4 , & vous aurez 8 pour le nombre des jettons.

### III.

Si le second triple est impair , il y faut faire ajouter 1 , & revenir 2 en vous-même ; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité , vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9 ; vous prendrez autant de fois 4 , qu'elle contiendra de fois 9 , sans vous embarrasser s'il y a du surplus. Mais vous vous souviendrez d'y ajouter le 2 que vous avez retenu , à cause du second triple impair ; la somme sera le nombre pensé ou pris.

*Exemple où le premier triple est pair , & le second est impair.*

Si on a pris 6 jettons , vous ferez multiplier 6 par 3 , le produit 18 est pair , dont la moitié est 9 : vous ferez aussi multiplier cette moitié 9 par

3, le produit est 27, auquel vous ferez ajouter 1, & l'on aura 28; mais vous retiendrez deux en vous-même. La moitié de 28 est 14, qui ne contient qu'une fois 9: ainsi ayant sçu que cette moitié, qui vous est inconnue, contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, & vous y ajouterez 2, que vous avez retenu, à cause du second triple impair, la somme 6 est le nombre des jettons qu'on a pris.

## I V.

Si le premier triple est impair, vous y ferez ajouter 1, & retiendrez 1 en vous-même, pour l'ajouter à la fin, comme on le dira. Vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous ferez encore tripler cette somme. Ce second triple sera pair ou impair.

## V.

Si ce second triple est pair, vous en ferez prendre la moitié, & vous demanderez combien elle contient de fois 9: puis vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de 9, & vous augmenterez ce produit de l'unité, que vous avez retenu, à cause du premier triple impair, la somme sera le nombre pensé ou pris.

*Exemple où le premier triple est impair, & le second est pair.*

Si on a pris 5 jettons, vous ferez prendre le triple de 5 qui est 15; auquel vous ferez ajouter 1, parce qu'il est impair, la somme sera 16, dont la moitié est 8: vous ferez multiplier cette moitié 8 par 3, le produit est 24, dont la moitié est 12, qui ne contient qu'une fois 9; ce que vous connaîtrez après l'avoir demandé. Ainsi vous pren-



dre une fois 4 , auquel vous ajouterez 1 , à cause du premier triple impair , & vous aurez 5 , qui est le nombre pris.

V I.

Mais si le second triple est impair , vous y ferez ajouter 1 ; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité , & vous retiendrez 2 en vous-même. Vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9 , vous prendrez autant de fois 4 , quelle contiendra de fois 9 , & vous y ajouterez 3 , à cause de 1 retenu en premier lieu pour le premier triple impair , & de 2 retenu en second lieu , pour le second triple impair : la somme sera le nombre pris.

*Exemple où les deux triples sont impairs.*

Si on a pris 7 jettons , vous ferez multiplier 7 par 3 , le triple sera 21 , que vous ferez augmenter de l'unité , à cause qu'il est impair , on aura 22 , & vous retiendrez 1 en vous-même. Faites ensuite prendre la moitié de 22 , qui est 11 , que vous ferez encore multiplier par 3 : & l'on aura 33 , qui est encore impair : ainsi vous retiendrez 2 en vous-même , à cause de ce second triple impair , vous ferez augmenter 33 de l'unité , & l'on aura 34 , dont la moitié est 17 , qui ne contient qu'une fois 9 . Ayant donc sçu que cette moitié contient une fois 9 , vous prendrez une fois 4 , auquel vous ajouterez 3 , somme de 1 retenu pour le premier triple , & de 2 retenu pour le second triple : la somme 7 est le nombre des jettons.

V I I.

Observez qu'en suivant cette méthode , 1°. Si

## 174 RECREAT. MATHÉMAT. ET PHYS.

l'on a pensé 3, ou qu'on ait pris 3 jettons, vous ne trouverez que 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu à cause du second triple impair, dont la somme est 3 : c'est-à-dire, que si on a pris 3 jettons, les deux triples 9, 15, seront impairs, & que 8 moitié du second triple, ne contenant point 9, il suffit d'ajouter 1, retenu à cause du premier triple impair, & 2, retenu à cause du second triple impair; cette somme 3 fera le nombre cherché.

2°. Si l'on a pris deux jettons, le premier triple 6 fera pair, & le second 9 fera impair; ainsi la moitié 5 du second triple, ne contenant point 9, vous ne ferez attention qu'à 2 retenu, à cause du second triple impair, qui sera par conséquent le nombre des jettons qu'on aura pris.

3°. Si l'on n'a pris qu'un jetton, le premier triple 3 sera impair, & le second 6 sera pair; ainsi vous ne ferez attention qu'à 1, retenu à cause du premier triple impair, qui sera le nombre pris.

4°. Si l'on n'a point pris de jettons, il n'y a point de triple, & par conséquent rien à retenir; il n'y a pas non plus de 9; on trouvera donc qu'on a pris 0, c'est-à-dire, rien.

## V I I I.

Au lieu de faire prendre la moitié du second triple, vous pouvez demander combien ce second triple contient de fois 9 : alors vous prendrez autant de fois 2, qu'on vous aura dit qu'il y a de fois 9 : & vous aurez soin d'ajouter 1 à ce produit, si le premier triple étant impair, vous avez fait ajouter 1.

### *Exemple.*

Si on a pensé 11, ou qu'on ait pris 11 jettons,

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 173**

faites multiplier 11 par trois, il viendra 33 ; ayant fait ajouter 1 à 33 pour avoir 34, vous retiendrez 1 en vous-même, puis vous ferez prendre la moitié de 34, qui est 17. Vous direz encore de multiplier ce 17 par 3, le produit sera 51. Enfin ayant sçu que 9 est 5 fois dans 51, vous prendrez 5 fois 9 qui font 45, auquel vous ajouterez 1, à cause du premier triple impair, & la somme 46 sera le nombre pensé, ou celui des jettons qu'on a pris.

**I X.**

Cette maniere de deviner un nombre pensé proposé dans ce dernier article VIII, est la même que celle qui a été proposée au probl. XVII, art. X. Lorsque le premier triple sera pair, on n'ajoutera rien à 2 pris autant de fois que le second triple contiendra de fois 9.

**Q U E S T I O N 11.**

*Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres. Il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui : donnant à chacun de ces pauvres neuf sols, il trouve qu'il lui manque trente-deux sols ; mais leur distribuant à chacun sept sols, il lui reste vingt-quatre sols. On demande combien il y avoit de pauvres, & combien cette personne avoit d'argent dans sa bourse.*

**I**L faut ajouter 24 & 32, la somme sera 56, dont la moitié 28 est le nombre des pauvres. Si l'on multiplie 28, nombre des pauvres, par 7, nombre des sols qu'on leur a donné, & qu'au produit 196 on ajoute les 24 sols de surplus, on

176 RECREAT. MATH. ET PHYS.  
aura 220 sols pour l'argent de la personne charitable.

R E M A R Q U E.

On auroit encore eu la même somme 220 sols, si l'on avoit multiplié 28, nombre des pauvres, par 9, nombre des sols qu'on a voulu donner, & que du produit 252 on eût ôté les 32 sols qui manquoient.

Q U E S T I O N III.

De l'âne & du mulet.

*Il arriva qu'un mulet & un âne faisant voyage ensemble, portoient chacun un certain nombre de barrils de vin. L'âne se plaignoit de ce qu'il étoit trop chargé. Le mulet lui dit : vous n'avez point raison de vous plaindre ; car si vous me donniez un de vos barrils, j'en aurois deux fois autant que vous, & si je vous en donnois un des miens, nous en porterions l'un autant que l'autre. Combien de barrils avoient ils chacun ?*

**L**E mulet avoit sept barils de vin, & l'âne en avoit cinq : l'âne donnant un baril au mulet, n'en auroit plus eu que quatre, & le mulet en auroit eu huit, qui est le double de la charge de l'âne ; mais si le mulet avoit donné un de ses barrils à l'âne : il en auroit encore eu 6, & l'âne en auroit aussi eu six.

R E M A R Q U E.

On me permettra de mettre ici cette question avec sa solution en vers latins.

Und

Unà cum mulo vinum portabat asella,  
 Atque suo graviter ceu pondere pressa gemit.  
 Talibus at dictis mox increpat ille gementem  
 Mater, quid luges tenera de more puella?  
 Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto;  
 At sit mensuram capias, equalia porto.

Dic mihi mensuras sapiens geometer istas  
 Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

Unam asina accipiens, amittens mulus & unam,  
 Si fiant equi, certè utrique ante dubbus  
 Distabant à se. Accipiat se mulus ac unam,  
 Amittatque asina unam, tunc distantia fiet  
 Inter eos quatuor. Multi ac eum pondera dupla  
 Sint asine; hinc simplex, mulo est distantia dupla.  
 Ergo habet hæc quatuor tantum, mulusque habet octo.  
 Unam asina si addat, si reddat mulus & unam,  
 Tunc ignota prius tibi pondera clara patebunt.

## S O L U T I O.

Mensuras quinque hæc, & septem mulus habebat.

On peut exprimer cette question en différentes manières. En voici une en latin avec la réponse.

Ova olim juvenes duo ferebant;  
 Horum sic comitem laceffit alter;  
 Unum si dederis mihi tuorum  
 Ovorum, numerus mihi tibi que  
 Par erit: cui max regressit alter;  
 Tu si mi dederis unum tuorum,  
 Duplo plura ego bajulabo quàm tu.  
 Dic ergo tulerit quot ova uterque?

## S O L U T I O.

*Tot prior ova tulit , lustrum quot continet annos.  
Posterior vaga quot sidera mundus habet.*

Ce que les deux jeunes gens viennent de dire touchant les œufs qu'ils portent, ou ce que l'on fait dire au mulet & à l'âne, se met dans la bouche de deux amis, qui se trouvent ensemble: l'un dit à l'autre, si je vous donnois une de mes pistoles, vous en auriez autant que moi: l'autre répond, & moi si je vous en donnois une des miennes, vous en auriez deux fois autant que moi. Il paroît que chacun sçait le nombre des pistoles de son ami. Mais il n'en est point de même de ceux à qui on propose cette question: il faut qu'ils le devinent.

## Q U E S T I O N IV.

*Les trois graces portant des couronnes de fleurs, rencontrèrent les neuf muses, à qui elles présenterent chacune un nombre égal de couronnes. La distribution faite, il se trouva que les graces & les muses en avoient chacune autant l'une que l'autre. On demande combien les graces avoient de couronnes, & combien elles en donnerent.*

**L**Es graces avoient chacune douze couronnes & chacune en donna une. On peut supposer encore qu'elles en avoient 24, & que chacune en donna deux; ou bien qu'elles en avoient 36, & que chacune en donna trois, & ainsi de suite, pourvu qu'en prenant les multiples de 12, on augmente à proportion le nombre des couronnes qui seront présentées.

Q U E S T I O N V.

*Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres : mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.*

**C**elui qui a promis la moitié de l'argent, doit donner 12000 livres : celui qui a promis le tiers doit donner 8000 livres, & celui qui a promis le quart doit donner 6000 livres. Ces trois sommes font ensemble 26000 livres.

Q U E S T I O N VI.

*Un pere en mourant laisse sa femme enceinte : il ordonne par son testament que si elle accouche d'un garçon, il héritera des deux tiers de son bien, qui est 3000 écus, & l'autre tiers sera pour la mere ; mais si elle accouche d'une fille, cette fille n'héritera que d'un tiers, & les deux autres tiers seront pour la mere. Il arrive que la mere accouche d'un garçon & de deux filles. On demande quel doit être le bien de chacun.*

**L**A part qui doit revenir au garçon est de 1500 écus, moitié du bien du pere ; celle qui reviendra à la mere est de 750 écus, & les filles auront chacune 375 écus. Ces quatre sommes font ensemble 3000 écus.

Q U E S T I O N VII.

*On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en l'enfance, la cinquieme partie en la jeunesse,*

*le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieillesse. On demande l'âge de cette personne.*

**I**L est facile de répondre que cette personne a soixante ans, qu'elle a passé 15 ans dans l'enfance, 12 ans dans la jeunesse, 20 ans dans l'âge viril; qu'enfin à 47 ans elle a commencé à entrer dans la vieillesse.

### Q U E S T I O N V I I I .

*Quarante-une personnes se sont trouvées à un repas; il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépense a été de 40 sols: les hommes ont payé 4 sols par tête, les femmes 3 sols chacune, & les enfans 4 deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.*

**I**L y avoit cinq hommes, trois femmes, & trente-trois enfans. Les cinq hommes ont payé 20 sols, les trois femmes ont payé 9 sols, & les trente-trois enfans ont payé 11 sols. Ces sommes font ensemble 40 sols; & le nombre des hommes, des femmes & des enfans, fait quarante - une personnes.

### Q U E S T I O N I X .

*Un lion de bronze, placé sur le bassin d'une fontaine, peut jeter l'eau par les yeux, par la gueule, & par le pied droit. S'il jette l'eau par l'œil droit, il emplira le bassin en deux jours: s'il la jette par l'œil gauche, il l'emplira en trois jours: s'il la jette par le pied, il l'emplira en quatre jours; enfin s'il la jette par la gueule, il l'emplira en six heures. On demande en combien de tems le bassin*



*sera rempli , si le lion jette l'eau en même tems par les yeux , par le pied , & par la gueule.*

**T**outes ces ouvertures laissant écouler l'eau en même tems , le bassin sera rempli en quatre heures , & environ quarante - quatre minutes. *Voyez la remarque de la question suivante.*

## Q U E S T I O N . X.

*Trois imprimeurs veulent entreprendre l'impression d'un livre : l'un le peut imprimer en six mois ; l'autre ne le peut qu'en neuf mois ; & le troisieme moins diligent , ou ayant moins d'ouvriers , ne le peut imprimer qu'en douze mois. On demande en combien de tems cet ouvrage sera imprimé , si on fait travailler les trois imprimeurs en même tems.*

**C**es imprimeurs travaillant tous en même tems à différentes parties de ce livre , ils l'auront imprimé en deux mois vingt-trois jours & une heure ou environ.

## R E M A R Q U E S.

L'un de ces imprimeurs fait en un mois la sixieme partie de l'ouvrage ; l'autre la neuvieme , & l'autre la douzieme : ces fractions ajoutées ensemble font  $\frac{1}{3} \frac{3}{6}$ . Pour avoir le tems demandé , il faut faire une regle de trois , dont le premier terme sera 13 , le second sera un mois , & le troisieme sera 36 : le quatrieme terme donnera le tems demandé , après avoir réduit les restes dans les parties des mois & des jours.

Il en est de même à l'égard de la question précédente : mais il faut réduire les jours en heures , à cause des six heures dont il est parlé. L'œil droit du lion jettera en une heure un quarante-huitième d'eau pour remplir le bassin ; l'œil gauche en jettera un soixante - douzième ; le pied droit en jettera un quatre-vingt-seizième , & la gueule en jettera un sixième. Toutes ces fractions reduites en une seule , on fera une regle de trois , comme on vient de le dire , dont le premier terme sera le numérateur , le second une heure , & le troisième sera le dénominateur. Il viendra au quatrième terme 4 heures & environ 44 minutes.

### P R O B L E M E   X X V .

*Deux personnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre proposé , en continuant alternativement jusqu'à ce que tous leurs nombres fassent ensemble un nombre déterminé plus grand que le proposé : faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.*

**P**Our faire que le premier arrive , par exemple , à cent , en supposant qu'il lui est libre , aussi bien qu'au second , de prendre alternativement un nombre tel qu'il voudra , pourvu qu'il soit moindre , par exemple , que 11 , il faut qu'il ôte ce nombre 11 de 100 , autant de fois qu'il pourra , & alors il restera ces nombres 1 , 12 , 23 , 34 , 45 , 56 , 67 , 78 , 89 , dont il doit se souvenir , & prendre le premier 1 ; ainsi quelque nombre que le second prenne ; il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au second nombre 12 ; car si le second prend , par exemple , 3 , qui avec 1 fait 4 , le pro-

mier n'a qu'à prendre 8 , pour parvenir à 12 : après quoi, quelque nombre que prenne le second , il ne pourra pas empêcher que le premier ne parvienne au troisieme nombre 23 ; car s'il prend, par exemple , 1 , qui avec 12 fait 13 , le premier n'a qu'à prendre 10, avec 13 qui fait 23 ; ensuite quelque nombre que le second prenne , il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au quatrieme nombre 34, ensuite au cinquieme 45, puis au sixieme 56 , de-là au septieme 67 , de-là au huitieme 78 , de-là au dernier 89 , & enfin à 100.

Si le second vouloit gagner, il est évident qu'il devoit prendre au commencement un nombre qui fût le reste à 12 du nombre que le premier auroit pris , afin de pouvoir parvenir à 12 : comme si le premier avoit pris 2 , le second devoit prendre 10 : mais si le premier sçait la finesse , il ne peut prendre que 1 , & alors le second devoit prendre 15 ; ce qui ne se peut , parce qu'ils sont convenus prendre des nombres moindres que 11. Mais ces sortes de jeux ne se font ordinairement qu'avec ceux qui les ignorent. Ainsi si le second ne sçait pas la finesse du jeu , le premier qui veut gagner ne doit pas prendre toujours 1 au commencement , mais quelque autre nombre , après avoir gagné la premiere partie, en risquant de perdre la seconde , pour mieux cacher l'artifice.

Si le premier veut gagner ; il ne faut pas que le plus petit nombre proposé mesure le plus grand : car dans ce cas le premier n'auroit pas une regle infailible pour gagner. Par exemple , si au lieu de 11 on avoit pris 10 qui mesure 100 , en ôtant 10 de cent , autant de fois qu'on le peut , on auroit ces nombres 10 , 20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le

premier ; ce qui fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10 , si le second étoit aussi fin que lui , il pourroit prendre le reste à 10 , & ainsi il auroit une règle infallible pour gagner.

Il n'est pas nécessaire d'ôter le plus petit nombre du plus grand , autant de fois qu'on le peut , pour sçavoir le nombre que le premier doit prendre pour gagner ; car il suffit de diviser le plus grand par le plus petit , & le reste de la division fera le nombre que le premier doit choisir au commencement. Comme dans l'exemple proposé en divisant 100 par 11 , il reste 1 pour le premier nombre du premier , auquel s'il ajoute 11 , il aura 12 pour son second nombre , auquel ajoutant encore 11 , il aura 23 pour son troisième nombre , & ainsi de suite jusqu'à 100.

## PROBLEME XXVI.

*Diviser un nombre donné en deux parties , dont la raison soit égale à celle de deux nombres donnés.*

**Q**U'il faille diviser le nombre donné 60 , en deux autres nombres , tel que le plus petit soit au plus grand comme 1 est à 2 , en sorte qu'une partie soit double de l'autre.

I.

Ajoutez ensemble les deux termes 1 , 2 , de la raison donnée ; divisez par leur somme 3 , le nombre donné 60 ; le quotient 20 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche , lequel étant ôté du nombre donné 60 , le reste 40 sera le plus grand nombre.

## II.

Ou bien multipliez les deux termes 1 , 2 , de la raison donnée, chacun par le nombre donné 60 , divisez les produits 60 , 120 , chacun par la somme 3 des deux mêmes termes 1 , 2 , & les deux quotiens 20 , 40 , seront les deux nombres qu'on cherche.

Ce problème est le même que la seconde question du livre premier de Diophante , & l'on peut aisément par son moyen résoudre les questions suivantes.

## Q U E S T I O N I.

*Faire la monnoie d'un écu blanc en deux especes différentes , en sorte qu'il y ait autant d'une espece que de l'autre.*

**C**omme l'on cherche une solution en nombres entiers , il est aisé de connoître que cette question ne se peut pas résoudre généralement pour toutes sortes de monnoies. Afin que la question soit possible , il faut que la somme des deux termes qui expriment la raison des deux especes proposées , puisse diviser exactement la valeur d'un écu blanc , lorsqu'il sera réduit en la monnoie la plus basse.

Ainsi en faisant valoir 60 sols un écu blanc , ou 240 liards , on connoît qu'on en peut donner la monnoie en sols & en liards , parce que sa valeur 240 se peut diviser par la somme 5 des deux termes 1 , 4 , qui expriment la raison d'un liard à un sol , parce que quatre liards font un sol. Si donc on divise 240 liards par 5 , on aura 48 liards , & par conséquent 48 sols , pour la solution de la

question. Car 48 sols avec 48 liards, qui valent 12 sols, font 60 sols, telle qu'est la valeur supposée d'un écu blanc.

On connoîtra de la même façon, qu'il faut 12 sols & 12 pieces de quatre sols pour faire un écu de 60 sols : parce que divisant 60 par 5, le quotient est 12 ; & qu'il faut 13 sols & 13 pieces de quatre sols pour faire un écu de 65 sols, parce que divisant 65 par 5, le quotient est 13.

De même, pour donner en sols & en pieces de quatre sols la monnoie d'un louis d'or, valant 11 livres, ou 220 sols, en sorte qu'il y ait autant de sols que de pieces de quatre sols, il faut 44 sols, & 44 pieces de quatre sols, parce que divisant 220 par 5, le quotient est 44 : & que pour donner dans les deux mêmes especes la monnoie d'un louis d'or valant 12 livres 5 sols, ou 245 sols, en sorte qu'il y ait autant d'une espece que de l'autre, il faut 49 sols & 49 pieces de quatre sols, parce que divisant 245, par 5, le quotient est 49.

Enfin l'on connoîtra que pour faire la monnoie en sols & en deniers d'un écu valant 65 sols, ou 780 deniers, en sorte qu'il y ait autant de sols que de deniers, il faut 60 sols & 60 deniers, parce que divisant 780 par 13, qui est la somme des deux termes 1, 12, qui exprime la raison d'un denier à un sol, parce qu'un sol contient 12 deniers, le quotient est 60. Ainsi des autres.



## QUESTION II.

*Un marchand de vin n'a que deux sortes de vins, l'un à 10 sols, & l'autre à 5 sols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 sols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de sorte que la bouteille revienne à 8 sols.*

**I**L faut qu'il prenne les différences du prix de ses vins au prix du vin demandé. Ces différences sont 2, 3, qui seront les termes d'une raison donnée. La somme de ces différences est 5. Premièrement pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 5 sols, qu'il doit prendre pour le mélange, il faut, selon l'article II, qu'il multiplie 30, nombre des bouteilles demandées, par 2, différence de 10., prix de l'un de ces vins, & de 8, prix du vin demandé, & qu'il divise le produit 60, par 5, somme des différences : le quotient 12 est le nombre des bouteilles de vin à 5 sols, qu'il prendra pour le mélange. Secondement, pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 10 sols, qu'il doit prendre pour le mélange, il faut, suivant le même article II, qu'il multiplie le même nombre 30 par 3, différence de 5, prix de l'autre de ses vins, & de 8, prix des vins demandés, & qu'il divise le produit 90 par 5, somme des différences : le quotient 18 est le nombre des bouteilles de vin à 10 sols, qu'il prendra pour le mélange. Ainsi ayant mêlé 12 bouteilles de vin à 5 sols, avec 18 bouteilles à 10, il en aura 30, qui reviendront à 8 sols la bouteille. Ce qu'il est aisé de reconnoître en multipliant 18 par 10, & 12 par 5, les deux produits 180, 60, ajoutés, sont égaux à 240, produit de 30, par 8.

## PROBLEME XXVII.

*Trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par des nombres donnés, il reste par-tout 1; & étant divisé par un autre nombre donné, il ne reste rien.*

I.

**P**our trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par les deux nombres donnés, 5, 7, chaque reste soit 1, & étant divisé par ce troisieme nombre donné 3, qui doit être premier avec les deux précédens, il ne reste rien; multipliez ensemble les deux premiers nombres donnés, 5, 7, pour avoir leur produit 35, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 36, qui sera tel qu'étant divisé par 5 & par 6, il restera 1. Et comme il arrive que ce même nombre 36 étant divisé par le troisieme nombre donné 3, il ne reste rien; il s'ensuit que 36 est le nombre qu'on cherche.

Mais on peut trouver une infinité d'autres nombres plus grands, qui satisferont aux conditions du problème; ce qui se fera par le moyen du premier & plus petit nombre trouvé 36, en cette sorte.

Pour trouver un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 36, au produit 105 des trois nombres donnés 5, 7, 3, & la somme 141 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 105, on aura 246 pour troisieme nombre, auquel si l'on ajoute le même produit 105, on aura 351 pour quatrieme nombre, & ainsi de suite.

II.

De même pour trouver un nombre tel qu'étant



# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 189

divisé séparément par les trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par ce quatrième nombre donné 11, qui doit aussi être premier avec les trois précédens 2, 3, 5, il ne reste rien; multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 6, pour avoir leur produit 30, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 31, qui étant divisé par chacun des trois nombres donnés, 2, 3, 5, donnera pour reste 1. Si ce nombre 31, étant divisé par le quatrième nombre donné 11, il ne reste rien, il seroit celui qu'on cherche; mais parce qu'il reste 9, le nombre 31 n'est pas celui qu'on cherche. Pour le trouver, voici ce qu'on fera.

Divisez 30 par 11, & ayant négligé le quotient 2, servez-vous du reste 8 en cette sorte. Cherchez au nombre 11, un multiple, qui surpasse de l'unité un multiple de 8. \* Vous trouverez que 33, multiple de 11, surpasse de l'unité 32, multiple de 8. Divisez 32 par 8, reste trouvé, & vous aurez pour quotient 4, par lequel vous multipliez le produit déjà trouvé 30. Ce second produit 120, augmenté de l'unité, sera le nombre cherché: car 121 est exactement divisible par 11, & donne pour reste 1, étant divisé par 2, 3, 5. Par le moyen de ce nombre 121, on en pourra trouver autant qu'on voudra, en cette sorte.

Pour avoir un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé, 121 à 330, produit des qua-

\* On ne peut faire cette recherche, qu'en essayant, ou, comme on dit, en tâtonnant. Mais comme il ne s'agit que des petits nombres, il n'est point difficile de trouver ces multiples. Il ne seroit pas nécessaire de chercher un multiple de 11, si on trouvoit un multiple de quatre, qui fût moindre de l'unité qu'un multiple de 11.

tre nombres donnés 2, 3, 5, 11, & la somme 451 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 330, on aura 781 pour troisième nombre, auquel, si on ajoute pareillement le même produit 330, on aura 1111 pour quatrième nombre, & ainsi de suite.

## III.

On pourra par un semblable raisonnement trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste un autre nombre que l'unité, par exemple, 2, & étant divisé par ce quatrième nombre donné 8, il ne reste rien. Multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés, 3, 5, 7, divisez leur produit 105 par le quatrième nombre donné 8, & négligeant le quotient, servez-vous du reste 1, auquel vous chercherez un multiple qui soit moindre que 8 de 2, \* parce qu'il s'agit de trouver un nombre qui ait 2 pour reste. Ce multiple est 6, divisez-le par un, qui est le reste trouvé : le quotient est 6, par lequel vous multipliez ce premier produit 105. Ce second produit 630, augmenté de 2, sera le nombre cherché : car 632 est exactement divisible par 8, & il donne 2 pour reste, si on le divise par 3, 5, 7. Ce même nombre 632 servira à en trouver autant d'autres qu'on voudra qui auront la même propriété, par une méthode semblable à la précédente, comme vous allez voir.

Pour trouver un second nombre plus grand, ajoutez le nombre trouvé 632 au produit 840

\* Il n'est point nécessaire de chercher ici un multiple de 8, puisque 8 surpasse 6, multiple de 1, de 2.

**PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 191**

des quatre nombres donnés, 3, 5, 7, 8, & la somme 1472 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 840, on aura 2312 pour le troisième nombre, auquel si l'on ajoute encore le même produit 840, on aura 3152 pour le quatrième nombre, & ainsi de suite.

**IV.**

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste 2, & étant divisé par ce quatrième nombre donné 11, il ne reste rien; divisez le produit 105 des trois premiers nombres donnés 3, 5, 7, par le quatrième 11, & négligeant le quotient, servez-vous du reste 6, pour l'usage que je vais indiquer. Cherchez un multiple de 11, qui surpasse de 2 un multiple de 6. \* Vous trouverez 44, multiple de 11, & 42 multiple de 6. Divisez 42 par le reste 6 trouvé; le quotient sera 7, par lequel vous multiplierez le premier produit 105. Ce second produit 735, augmenté de 2, sera le nombre cherché. Car 737 est divisible sans reste par 11, & si on le divise par ces nombres, 3, 5, 7, séparément, il reste 1.

\* Voyez la note de la page 189.

Par le moyen de ce nombre 737, on en pourra trouver autant d'autres qu'on voudra, en y ajoutant 1155, produit des nombres 3, 5, 7, 11, comme on l'a enseigné dans les exemples précédents.

**V.**

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par 5, ou par 7, ou par 8, il reste 3, & étant divisé par 11, il ne reste rien, on multipliera ensemble ces trois nombres 5, 7, 8, dont on

divisera le produit 280 par 11, pour avoir le reste 5, en négligeant le quotient. On cherchera ensuite un multiple de 11, qui surpasse de 3 un multiple de 5. On trouvera 33, multiple de 11, & 30, multiple de 5 : puis on divisera 30 par 5, & l'on aura pour quotient 6, par lequel on multipliera le premier produit 280. Ce second produit 1680, augmenté de 3, sera le nombre cherché. Car 1683 se divise exactement par 11, & donne 3 pour reste, étant divisé par les nombres proposés 5, 7, 8.

C'est par le moyen de ce problème qu'on peut résoudre la question suivante.

## QUESTION.

*Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.*

**I**L s'agit ici de trouver un nombre tel qu'étant divisé par celui qu'on voudra des trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par le quatrième nombre donné 7, il ne reste rien ; car ce nombre sera celui des louis d'or qui étoient dans la bourse. Et comme il y a plusieurs nombres qui peuvent satisfaire à la question, comme on a vu au problème précédent, on pourra juger par la grosseur, ou par la pesanteur de la bourse, du nombre des louis d'or qu'elle pouvoit contenir.

Mais pour trouver le moindre de tous ces nombres, cherchons premièrement un nombre qui soit exactement

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 193

exactement divisible par 2, par 3, & par 5, & qui étant augmentée de 1, soit aussi exactement divisible par 7. Si on multiplie ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 5, leur produit 30 sera divisible par chacun de ces trois nombres; mais en y ajoutant 1, la somme 31 n'est pas divisible par le quatrième nombre donné 7; car il reste 3. Divisez donc 30 par le quatrième nombre proposé 7; la division donnera 2 pour reste, & vous négligerez le quotient. Prenez 6 multiple de 2, qui est moindre que 7 de l'unité. \* Divisez le \* Voyez la note de la page 189.  
par 2, reste trouvé, & vous aurez 3 pour quotient, par lequel vous multipliez le premier produit 30. Ce second produit 90, augmenté de 1, sera le premier nombre cherché; car 91 se divise sans reste par 7, & donne 1 pour reste, s'il est divisé par les nombres proposés 2, 3, 5.

Pour trouver un second nombre plus grand, qui satisfasse à la question, multipliez ensemble les quatre nombres donnés, 2, 3, 5, 7, ajoutez à leur produit 210 le premier & plus petit nombre trouvé 91, la somme 301 sera le second nombre qu'on cherche; auquel si l'on ajoute le produit précédent 210, la somme 511 sera un troisième nombre qui satisfera; auquel pareillement si l'on ajoute le même produit 210, la somme 721, sera un quatrième nombre qui satisfera, & ainsi à l'infini.

Ainsi pour la résolution de la question, l'on peut dire que dans la bourse perdue, il pouvoit y avoir 91 louis d'or, ou bien 301, ou bien 511, ou bien encore 721; & c'est selon la grosseur de la bourse comme nous avons déjà dit, qu'il en faut juger.

I. REMARQUE.

On peut proposer cette question d'une autre  
Tome I. N

maniere. Une pauvre femme porte au marché un panier d'œufs; mais venant à être heurtée, elle laisse tomber son panier, & tous les œufs sont cassés. Celui qui a causé ce malheur veut payer les œufs; il demande à la femme combien elle avoit d'œufs dans son panier: elle lui répond qu'il y en avoit environ trois cens; que les comptant deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, il restoit toujours 1, & les comptant sept à sept, il ne restoit rien.

La question est ici déterminée par la condition que la femme a mise, en disant qu'il y avoit environ 300 œufs. Ainsi le nombre 301 sera le nombre des œufs. Si la condition n'y avoit point été mise, il en auroit fallu juger par la grandeur du panier. Mais on en jugera plus sûrement en demandant à la femme à peu près le nombre, comme de 300, ou de 500, ou de 700, &c. Alors, selon la réponse, on choisit celui des nombres qui approche le plus de celui qu'elle a répondu.

## II. R E M A R Q U E.

Peut-être ne trouvera-t-on pas mauvais qu'on mette ici la solution du premier article de ce problème par algebre; on suivra la méthode que M. de Lagny, de l'académie royale des sciences, a indiqué dans ses nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, p. 430. Elle peut être d'un grand secours dans les problèmes indéterminés.

### I.

Il s'agit de trouver un nombre  $x$  tel qu'étant divisé par 3, il ne reste rien; étant divisé par 5,

il reste 1, & étant divisé par 7, il reste encore 1. La question proposée se réduira à ces équations.  
 $1^{\circ}. \frac{x}{3} = p. 2^{\circ}. \frac{x-1}{5} = n.$

Je choisis les deux premières équations pour les comparer l'une à l'autre, & je les réduis à cette expression.  $4^{\circ}. x = 3p = 5m + 1$  : par conséquent  $p = \frac{5m+1}{3}$  où  $m$  est indéterminé : pour le trouver, voici le raisonnement que je fais.

Puisque  $5m + 1$  doit être divisé exactement par 3, toutes les différences de  $5m + 1$  à 3, son dénominateur, ou, ce qui est la même chose, à  $3m$ , doivent être aussi divisées par 3. Ainsi pour trouver la dernière différence, où  $m$  demeure seule, j'ôte autant de fois qu'il est possible  $3m$  de  $5m + 1$  : la première différence est  $2m + 1$ , & j'ai  $\frac{2m+1}{3}$  : mais  $m$  n'étant point seule, cette expression ne convient pas : j'ôte donc  $2m + 1$  de  $3m$ , son dénominateur, & j'ai  $m - 1$ , qui étant divisé par 3, donne ce rapport  $\frac{m-1}{3}$ .

Pour trouver la valeur de  $m$ , qui est indéterminé, je suppose,  $1^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 0$ , qui donne  $m = 1$ ,  $2^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 1$ , qui donne  $m = 4$ .  $3^{\circ}. \frac{m-1}{3} = 2$ , qui donne  $m = 7$ , &c.  $m = 1$  ne pouvant satisfaire aux équations comparées, je prends  $m = 4$ , qui donne la solution des équations comparées dans la quatrième expression  $x = 3p = 5m + 1$  : car  $x = 21$ , qui étant divisé par 3, n'a point de reste, & étant divisé par 5, donne 1 pour reste.

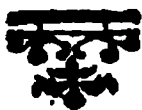
Mais si je substitue 21, dans la troisième supposition  $\frac{x-1}{7}$ , je trouve que  $\frac{21-1}{7}$ , ne donne point au quotient un nombre qui ait 1 pour reste. Je

cherche donc une autre valeur de  $m$  dans toutes celles qu'on peut trouver, & j'essaie celle qui peut convenir : pour la trouver plus sûrement, voici encore le raisonnement que je fais.

Puisque dans la recherche que j'ai fait de la valeur de  $m$ , par cette expression  $\frac{m-1}{3}$ , j'ai supposé que  $\frac{m-1}{3}$ , étoit égal à un nombre pris à volonté, tel que 0, 1, 2, 3, 4, &c. Je suppose qu'un de ces nombres pris à volonté & indéterminé, soit égal à  $f$ , ainsi j'aurai  $\frac{m-1}{3} = f$ , d'où l'on aura  $m = 3f + 1$ . Substituant donc ce  $3f + 1$  dans la quatrième équation  $x = 5m + 1$ , je trouverai  $5m + 1 = 15f + 5 + 1 = x$ . Ainsi dans la troisième équation  $\frac{x-1}{7} = n$ , je substitue  $15f + 6$ , au lieu de  $x$ , ce qui me donne  $\frac{15f+6}{7}$ . J'ôte  $7f$  autant de fois que je le puis de  $15f + 6$ , pour avoir la dernière différence  $f + 6$ , qui étant divisée par 7, donne  $\frac{f+6}{7}$ .

Ainsi pour avoir la valeur de  $f$ , je suppose, 1°.  $\frac{f+6}{7} = 0$ , qui donne  $f = -6$ , qui ne peut convenir. 2°.  $\frac{f+6}{7} = 1$ , qui donne  $f = 7 - 6 = 1$ , & cette valeur de  $f$  donne la solution des trois équations proposées. Car substituant 1 à la place de  $f$ , dans cette équation  $m = 3f + 1$ , j'aurai  $m = 4$  &  $x = 5m + 1 = 21$ , qui est le nombre cherché.

On trouvera d'autres nombres que 21, si on suppose  $\frac{f+6}{7}$  égal à 2, à 3, à 4, &c.





## I I.

Si j'avois comparé ensemble la troisieme & la seconde équation  $\frac{x-1}{7} = n$  &  $\frac{x-1}{5} = m$ , j'aurois eu  $x = 7n + 1 = 5m + 1$ , &  $n = \frac{5m}{7}$ , & l'on auroit vu que  $m$  doit être égal à 7, ou à un multiple de 7. Car si l'on ôte  $5m$  de  $7m$ , on aura pour premier reste  $2m$ , dont le double  $4m$  étant ôté de  $5m$ , donnera  $m$  : par conséquent on aura  $\frac{m}{7}$ . Si on fait  $\frac{m}{7} = 1$ , on aura  $m = 7$ . Si l'on fait encore  $\frac{m}{7} = 2$ , on aura  $m = 14$ , &c.  $m = 7$  satisfait à la question : car  $x = 5m + 1 = 36$ .  $m = 14$  y satisfait aussi, & donne un autre nombre que 36 ; & ainsi de suite à l'infini.

## I I I.

Si l'on avoit proposé un plus grand nombre d'équations, comme, 1°.  $\frac{x-1}{2} = m$ . 2°.  $\frac{x-1}{3} = n$ , 3°.  $\frac{x-1}{7} = p$ . 4°.  $\frac{x}{11} = q$ . On auroit fait 5°.  $x = 2m + 1 = 3n + 1$ , & par conséquent  $m = \frac{1}{2}n$ . J'ôte  $2n$  de  $3n$ , il reste  $n$ . Donc  $m = \frac{n}{2}$ . D'où je fais 1°.  $\frac{n}{2} = 1$ , qui donne  $n = 2$ . 2°.  $\frac{n}{2} = 2$ , qui donne  $n = 4$ . 3°.  $\frac{n}{2} = 3$ , qui donne  $n = 6$ , &c. Je substitue quelqu'une de ces valeurs d' $n$  dans la cinquieme équation  $x = 3n + 1$ , & je trouve que les deux valeurs 2 & 4 de  $n$  satisfont dans les deux premieres équations comparées ; mais elles ne satisfont point dans la troisieme question  $\frac{x-1}{7} = p$ .

C'est pourquoi je prens  $n = 2f$ , que je substitue dans la cinquieme équation  $x = 3n + 1$ , & j'ai,

6°.  $x = 6f + 1$ , qui étant substitué dans  $\frac{x-1}{5}$ , troisième expression, donne  $f$ , & ôtant  $5f$  de  $6f$ , il restera  $f$  qui divisé par  $5$ , donnera  $\frac{f}{5}$ , & par conséquent 1°.  $\frac{f}{5} = 1$ , qui donne  $f = 5$ . 2°.  $\frac{f}{5} = 2$  qui donne  $f = 10$ , &c. La première valeur  $5$  de  $f$  substituée dans la sixième expression  $x = 6f + 1$ , donne la solution des trois premières équations; mais elle ne donne point la solution de la quatrième  $\frac{x}{11}$ . Car  $31 = x$  ne peut être exactement divisé par  $11$ .

Je fais donc  $f = 5g$ , que je mets à la place de  $f$  dans la sixième équation  $x = 6f + 1$ , ce qui donne  $x = 30g + 1$ , que je substitue dans la quatrième équation  $\frac{x}{11}$ , & j'ai  $\frac{30g+1}{11}$ . J'ôte  $30g + 1$  de  $33g$  multiple de  $11g$ , il reste  $3g - 1$ . J'ôte  $3g - 1$ , ou son multiple  $9g + 3$ , de  $11g$ , puis le reste  $2g + 3$  de  $3g - 1$ , je trouve pour dernier reste  $g - 4$ . Faisant  $\frac{g-4}{11} = 0$ , on a  $g = 4$ , qui donne la solution de la septième équation  $x = 30g + 1 = 121$ , qui convient aux quatre équations proposées.



## PROBLEME XXVIII.

*Diviser plusieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en sorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la somme des deux produits soit par-tout la même.*

**S**l on donne, par exemple, ces trois nombres 10, 25, 30, & qu'on veuille avoir une solution en nombres entiers, prenez pour les deux nombres qu'on cherche, deux nombres quelconques, pourvu que leur différence soit 1, ou telle qu'elle puisse diviser exactement le produit sous le plus grand de ces deux nombres, & la différence de deux quelconques des trois nombres donnés, & que le plus grand de ces deux nombres, multiplié par le plus petit nombre donné 10, surpasse le plus petit des deux mêmes nombres, multiplié par le plus grand nombre donné 30.

Choisissez, par exemple, 2 & 7; leur différence 5, mesure exactement 105, produit de 7, grand nombre choisi, & de 15, différence de 25 & de 10. De plus, 70 produit de 7, grand nombre choisi, par 10, le plus petit nombre donné, surpasse 60, produit du plus grand nombre donné, par 2, petit nombre choisi.

Ayant donc trouvé les deux nombres qu'on cherche, 2, 7, la premiere partie du premier nombre donné 10, se pourra prendre à volonté, pourvu qu'elle soit moindre que le nombre donné 10, & que le nombre 10, qui reste en ôtant 60, produit de 2, petit nombre trouvé, par le plus grand donné

30 de 70 , produit de 7 , grand nombre trouvé , par le plus petit nombre donné 10. Cette premiere partie doit être aussi moindre que 2 , quotient de ce reste 10 , divisé par 5 , différence des deux nombres choisis 2 , 7. Elle sera donc 1 , que l'on ôtera du premier nombre donné 10 ; le reste 9 sera l'autre partie , laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7 , & la premiere 1 étant multipliée par le premier nombre trouvé 2 , la somme des deux produits 63 , 2 , est 65.

Pour trouver la premiere partie du second nombre donné , 25 , multipliez la différence 15 des deux premiers nombres donnés 10 , 25 , par le plus grand nombre trouvé 7 , & ayant divisé le produit 105 , par la différence 5 , des deux nombres trouvés 2 , 7 , ajoutez le quotient 21 à la premiere partie trouvée 1 , du premier nombre donné 10 , & la somme 22 sera la premiere partie du second nombre donné 25 ; c'est pourquoi l'autre partie sera 3 , laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7 , & la premiere 22 , par le premier 2 , la somme des deux produits 21 , 44 , fait aussi 65.

Enfin pour trouver la premiere partie du troisieme nombre donné 30 , multipliez la différence 5 des deux derniers nombres donnés 25 , 30 , par le plus grand nombre trouvé 7 , & ayant divisé le produit 35 , par la différence 5 des deux nombres trouvés 2 , 7 , ajoutez le quotient 7 , à la premiere partie 22 du second nombre donné 30 , & la somme 29 sera la premiere partie du troisieme nombre donné 30 : c'est pourquoi l'autre partie sera 1 , laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7 , & la premiere 29 , par le premier 2 , la somme des deux produits 7 , 58 , fait aussi 65.

Ou bien multipliez la différence 20 du premier & du troisieme nombre donné, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 140 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 28 à la premiere partie 1, du premier nombre donné 10, & vous aurez 29, comme auparavant, pour la premiere partie du troisieme nombre donné 30.

Si l'on prend 1, 6, pour les deux nombres qu'on cherche & 4 pour la premiere partie du premier nombre donné 10, auquel cas l'autre partie sera 6, qui étant multiplié par le second nombre trouvé 6, & la premiere 4, par le premier 1, la somme des deux produits 36, 4, est 40; la premiere partie du second nombre donné 25, sera 22, & l'autre partie par conséquent sera 3, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 22, par le premier 1, la somme des deux produits 18, 22, est aussi 40; enfin la premiere partie du troisieme nombre donné 30 sera 28; ce qui fait que l'autre partie sera 2, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 28 par le premier 1, la somme des deux produits 12, 28, est aussi 40. Ce problème sert à résoudre la question suivante.

## Q U E S T I O N I.

*Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu 25 au même prix, & une troisieme femme en a vendu 30 aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.*

**I**L est évident qu'afin que la question soit possible, il faut que les femmes vendent leurs pom-

mes à deux diverses fois, & à divers prix, bien qu'à chaque fois elles vendent chacune à un même prix. Si ces deux prix différens sont 2, 7, qui sont

|     | Pom. | Den. | Pom. | Den. |
|-----|------|------|------|------|
| 10. | 1    | à 2  | 9    | à 7  |
| 25. | 22   | à 2  | 3    | à 7  |
| 30. | 29   | à 2  | 1    | à 7  |

les deux nombres que nous avons trouvés au problème précédent; & si l'on suppose que la première fois elles vendent 2 deniers la pomme, & qu'à ce prix, la première vende 1 pomme, la seconde 22, & la troisième 29, les trois nombres 1, 22, 29, seront les premières parties des trois nombres donnés, 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problème précédent. Dans ce cas la première femme aura 2 deniers, la seconde en aura 44, & la troisième en aura 58. Ensuite, si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 7 deniers la pomme, alors la première femme aura 63 deniers pour neuf pommes qui lui restent, la seconde aura 21 deniers pour trois pommes qui lui restent, & la troisième aura 7 deniers pour 1 pomme qui lui reste; de sorte que chacune aura en tout 65 deniers.

Ou bien si les deux prix différens sont 1, 6, qui sont deux autres nombres que nous avons trouvés au problème précédent, & si l'on suppose que la première fois elles vendent 1 denier la pomme, & qu'à ce prix la première vende 4 pommes, la seconde 22, & la troisième 28, ces trois nombres 4, 22, 28, seront les premières parties des trois nombres donnés 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problème précédent. Dans ce cas la

premiere femme aura 4 deniers, la seconde en aura

| <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> | <i>Pom.</i> | <i>Den.</i> |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 10.         | 4           | 6           | 6           |
| 25.         | 22          | 3           | 6           |
| 30.         | 28          | 2           | 6           |

22, & la troisieme en aura 28. Ensuite si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 6 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 36 deniers pour 6 pommes qui lui restent, la seconde aura 18 deniers pour 3 pommes qui lui restent, & la troisieme aura 12 deniers pour 2 pommes qui lui restent; de sorte que chacune aura en tout 40 deniers.

## REMARQUES.

### I.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond sur la solution de ces sortes de questions, pourront consulter ce qui en est dit dans la seconde partie de l'arithmétique universelle, p. 456. On y traite en particulier celle qui est ici proposée; on dit qu'elle a seulement 6 solutions, & que la plus grande somme est 65. Je vais entreprendre de la résoudre par l'algebre, pour faire voir la fécondité de l'analyse, qui renferme des richesses qu'on tire de son sein, quand on est assez heureux pour la traiter avec ménagement. Je rapporterai dix solutions différentes de cette même question; les sommes de chaque femme seront, après chacune des dix ventes, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70. J'espere que cela fera plaisir à ceux qui commencent à apprendre l'algebre, & je crois que ce sera pour eux une récréation.

## I I.

Il faut se souvenir que trois femmes ayant porté des pommes au marché, l'une en a vendu 10, l'autre 25, & la troisième 30, à un même prix; & qu'étant revenues du marché, elles ont rapporté toutes trois une même somme. On se souviendra encore qu'elle doivent avoir vendu à deux différentes reprises, & à divers prix chaque fois.

J'appelle  $u$  le prix auquel les trois femmes ont vendu leurs pommes dans la première vente, &  $p$  le prix auquel elles ont vendu le reste dans la seconde vente.

Je nomme  $x$  le nombre des pommes de la première femme, vendues au prix  $u$ ; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix  $p$ , sera  $10-x$ . Ainsi l'argent de la première vente sera  $xu$ , & celui de la seconde vente sera  $10p-px$ : la somme est  $xu+10p-px$ .

Je nomme  $z$  le nombre des pommes vendues au prix  $u$  par la seconde femme: par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix  $p$ , sera  $25-z$ . Ainsi l'argent de la première vente sera  $zu$ , & celui de la seconde vente sera  $25p-pz$ : la somme est  $zu+25p-pz$ .

Enfin je nomme  $y$  le nombre des pommes vendues par la troisième femme au prix  $u$ ; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix  $p$ , sera  $30-y$ . Ainsi l'argent de la première vente sera  $yu$ , & celui de la seconde vente sera  $30p-py$ : la somme de cette troisième femme est  $yu+30p-py$ .

Je rassemblerai dans cette table tous ces différents prix: ceux qui sont à gauche marquent les prix des pommes vendues par les trois femmes



PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 205

dans la premiere vente , & ceux qui sont à droite marquent les prix des pommes vendues dans la seconde vente.

|                       | 1 <sup>e</sup> vente. | 2 <sup>e</sup> vente. |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> femme. | $xu$                  | $1cp - px$            |
| 2 <sup>e</sup> femme. | $zu$                  | $2sp - pz$            |
| 3 <sup>e</sup> femme. | $yu$                  | $3op - py$            |

La somme que rapporte la premiere femme est  $xu + 1op - px$ .

La somme que rapporte la seconde femme est  $zu + 2sp - pz$ .

La somme que rapporte la troisieme femme est  $yu + 3op - py$ .

Ces 3 sommes doivent être égales, c'est-à-dire, que  $xu + 1op - px = zu + 2sp - pz = yu + 3op - py$ . D'où je tire ces équations, 1°. en comparant les deux 1<sup>res</sup> sommes  $xu + 1op - px = zu + 2sp - pz$ ; d'où l'on a  $xu - px = zu - pz + 1sp$ , & divisant tout par  $u - p$ , on trouve  $x = z + \frac{1sp}{u-p}$ . 2°. En comparant la premiere & la troisieme somme  $xu + 1op - px = yu + 3op - py$ , d'où l'on a  $xu - px = yu - py + 2op$ , & divisant encore tout par  $u - p$ , on a  $x = y + \frac{2op}{u-p}$ . 3°. En comparant la seconde & la troisieme somme  $zu + 2sp - pz = yu + 3op - py$ , d'où l'on a  $zu - pz = yu - py + 5p$ , & divisant tout par  $u - p$ , on a  $z = y + \frac{5p}{u-p}$ .

On voit dans ces trois équations que la différence de  $u$  à  $p$  ( $u - p$ ) doit être un diviseur exact de 15, de 20, & de 5, c'est-à-dire, des différences des nombres des pommes portées au marché. Mais pour  $x$  parvenir avec quelque certitude à la valeur

*Cinquieme solution.*

Je suppose  $y=4$ . donc  $z=5$ , &  $x=8$ ,  
 $u=6$ .  $p=1$ .

$$\begin{array}{l} \text{Som-} \\ \text{mes.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}}. \text{ Fem. } xu + 10p - px = 48 + 10 - 8 = 50. \\ 2^{\text{e}}. \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 30 + 25 - 5 = 50. \\ 3^{\text{e}}. \text{ Fem. } yu + 30p - py = 24 + 30 - 4 = 50. \end{array} \right.$$

*Sixieme solution.*

Je suppose  $y=5$ , par conséquent  $z=6$ , &  $x=9$ .  
 $u=6$ .  $p=1$ .

$$\begin{array}{l} \text{Som-} \\ \text{mes.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}}. \text{ Fem. } xu + 10p - px = 54 + 10 - 9 = 55. \\ 2^{\text{e}}. \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 36 + 25 - 6 = 55. \\ 3^{\text{e}}. \text{ Fem. } yu + 30p - py = 30 + 30 - 5 = 55. \end{array} \right.$$

*Septieme solution.*

Je suppose  $y=6$ , donc  $z=7$ , &  $x=10$ .  
 $u=6$ .  $p=1$ .

$$\begin{array}{l} \text{Som-} \\ \text{mes.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}}. \text{ Fem. } xu + 10p - px = 60 + 10 - 10 = 60. \\ 2^{\text{e}}. \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 42 + 25 - 7 = 60. \\ 3^{\text{e}}. \text{ Fem. } yu + 30p - py = 36 + 30 - 6 = 60. \end{array} \right.$$

On voit par cette solution que la premiere femme vend toutes ses pommes dans la premiere vente.

I I I.

Je ne puis plus supposer une plus grande valeur à  $y$ , parce qu'il en viendrait à  $x$  une qui seroit plus grande que 10, c'est-à-dire, que la premiere femme seroit obligée de vendre plus de pommes qu'elles

qu'elle n'a ; ce qui est contre la supposition. D'où il suit qu'il faut chercher à  $u$  & à  $p$  une autre valeur que celle qu'on leur a donnée dans les solutions précédentes. Ainsi je fais  $\frac{p}{u-p} = 2$ , d'où il vient  $5p = 2u - 2p$ , ou  $7p = 2u$  ; faisant  $p = 2$ , on aura  $u = 7$ . Ces valeurs trouvées, on les substituera dans les comparaisons  $x = z + \frac{15p}{u-p} \cdot x = y + \frac{20p}{u-p}$ .  $z = y + \frac{15p}{u-p}$ , & l'on aura, 1°.  $x = z + 6$ . 2°.  $x = y + 8$ . 3°.  $z = y - 2$ .

*Huitieme solution.*

Je suppose  $y = 0$ , donc  $z = 2$  &  $x = 8$  ( par les équations précédentes ).

$$u = 7. \quad p = 2.$$

$$\begin{array}{l} \text{Som.} \\ \text{mes.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 56 + 20 - 16 = 60. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 14 + 50 - 4 = 60. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 0 + 60 - 0 = 60. \end{array} \right.$$

L'argent que chaque femme rapporte dans cette solution, est le même que dans la précédente : cependant ces deux solutions sont fort différentes l'une de l'autre, comme il est aisé de connoître si l'on y fait quelque attention.

*Neuvieme solution.*

Je suppose  $y = 1$ , par conséquent  $z = 3$ , &  $x = 9$ . (selon les équations dernieres. )

$$u = 7. \quad p = 2. \quad \bullet$$

$$\begin{array}{l} \text{Som.} \\ \text{mes.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 63 + 20 - 18 = 65. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 21 + 50 - 6 = 65. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 7 + 60 - 2 = 65. \end{array} \right.$$

Cette neuvieme solution fait connoître que la premiere femme a vendu 9 pommes à 7 deniers, dans la premiere vente, & une à 2 deniers dans la deuxieme vente : que la seconde femme a vendu 3 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 22 à deux deniers dans la deuxieme vente : que la troisieme femme a vendu 1 pomme à 7 deniers dans la premiere vente, & 29 à 2 deniers dans la deuxieme vente ; d'où il suit que chacune a rapporté 65 deniers.

*Dixieme solution.*

Je suppose enfin  $y=2$ , donc  $z=4$  &  $x=10$ .  
(dernieres équations).

$$u=7. \quad p=2.$$

$$\text{Sommes.} \begin{cases} 1^{\text{e}} \text{ Fem. } xu + 10p - px = 70 + 20 - 20 = 70. \\ 2^{\text{e}} \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 28 + 50 - 8 = 70. \\ 3^{\text{e}} \text{ Fem. } yu + 30p - py = 14 + 60 - 4 = 70. \end{cases}$$

Enfin cette derniere solution montre que la premiere femme a vendu les 10 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, mais elle n'en a point vendu dans la deuxieme ; que la seconde femme a vendu 4 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 21 à 2 deniers dans la seconde vente ; que la troisieme femme a vendu 2 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 28 à 2 deniers dans la deuxieme vente. D'où il suit que chacune a rapporté 70 deniers du marché.



## QUESTION. II.

*Un chef de cuisine a une certaine quantité d'œufs. Trois de ses aides lui en demandent. Il en donne au premier la moitié de ce qu'il a, & la moitié d'un œuf; au second la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf : enfin il donne au dernier la moitié de ce qui lui reste & la moitié d'un œuf. On demande combien ce chef de cuisine avoit d'œufs & comment il a pu faire pour en donner des moitiés sans en casser.*

**L**A solution de cette question paroît impossible d'abord, à cause des moitiés d'œufs qu'il faut donner : cependant on verra bientôt que cette question a des solutions à l'infini. Pour trouver le plus petit nombre d'œufs que puisse avoir le chef de cuisine, prenez la troisième puissance de 2, qui est 8; diminuez ce 8 de l'unité, & le nombre 7 sera le plus petit nombre qu'on cherche : car ce chef de cuisine ayant donné au premier aide quatre œufs, il lui en a donné la moitié de ce qu'il avoit, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté trois œufs. Ayant donné au second aide de cuisine deux œufs, il lui a donné la moitié de ce premier reste, avec la moitié d'un œuf, & il lui est resté un œuf. Enfin ayant donné au troisième aide un œuf, il lui a donné la moitié de ce deuxième reste, avec la moitié d'un œuf. Dans ce cas il n'est point resté d'œuf au chef de cuisine.

Si on veut de plus grands nombres que 7, il faut multiplier séparément le cube 8 par les nombres 2, 3, 4, 5, &c. selon leur suite naturelle, diminuer le produit de l'unité, & l'on aura autant

212 RECREAT. MATH. ET PHYS.  
de nombres qu'on voudra à l'infini, qui satisfe-  
ront à la question.

*Observations.*

J'ai dit qu'il falloit prendre la troisieme puissance de deux, parce qu'il n'y a que trois aides; mais s'il y en avoit quatre, il faudroit prendre la quatrieme puissance, qui est 16, & la diminuer de l'unité: s'il y en avoit cinq, il faudroit prendre la cinquieme puissance de 2, qui est 32, & la diminuer de l'unité, & ainsi des autres. Pour avoir plusieurs nombres qui satisfassent à la question, il faut multiplier ces puissances par quelque nombre pris à volonté, & ôter l'unité du produit.

Q U E S T I O N III.

*Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages & des choux; elle a vendu les œufs 2 deniers, les fromages 6 deniers, & les choux 4 deniers: elle rapporte 10 sols. Combien avoit-elle d'œufs, combien de fromages, combien de choux?*

**E**lle pouvoit avoir sept œufs, quinze fromages & quatre choux.

P R O B L E M E XXIX.

*Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle, 1, 2, 3, 4, &c. étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.*

Pl. 1, **O**N se servira commodément des dix premie-  
fig. 2. res cartes d'un jeu entier, pour exécuter ce problème. On les disposera en rond, comme vous

voyez les dix premiers nombres dans la figure. l'as sera représenté par la lettre A jointe à 1 , & le dix sera représenté par la lettre K jointe à 10.

Ayant fait toucher un nombre , ou une carte telle que voudra celui qui en aura pensé une , ajoutez au nombre de cette carte touchée le nombre des cartes que l'on aura choisies , comme 10 , dans cet exemple : puis faites compter la somme que vous aurez à celui qui a pensé la carte , par un ordre contraire à la suite naturelle des nombres , en commençant par la carte qu'il aura touchée , & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura pensé ; car en comptant de la sorte , il finira à compter cette somme sur le nombre ou sur la carte qu'il aura pensé , & vous fera par conséquent connoître cette carte.

Comme si l'on a pensé 3 marqué par la lettre C , & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F ; ajoutez 10 à ce nombre 6 , vous aurez la somme 16 , puis faites compter \* cette somme 16 depuis le nombre touché F vers E , D , C , B , A , & ainsi de suite par un ordre rétrograde ; en sorte que l'on commence à compter le nombre pensé 3 sur F , 4 sur E , 5 sur D , 6 sur C , & ainsi de suite jusqu'à 16 ; ce nombre 16 se terminera en C , & fera connoître qu'on a pensé 3 , qui répond à C.

### R E M A R Q U E S.

#### I.

On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes , selon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15 ou 8 cartes , il faudroit ajouter 15 ou 8 au nombre de la carte touchée.

\* Observez qu'on ne doit pas compter cette somme tout haut , mais en soi-même , & seulement par pensée.

## II.

Pour mieux couvrir l'artifice , il faut renverser les cartes , en sorte que les points soient cachés , & bien retenir la suite naturelle des cartes , & en quel endroit est le premier nombre , ou l'as , afin de sçavoir le nombre de la carte touchée , pour trouver celui jusqu'où il faut faire compter.

## P R O B L E M E XXX.

*Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons , ou de cartes à certaines conditions , deviner combien chacune en aura pris.*

**F**Aites prendre au troisieme un nombre de jettons ou de cartes , tel qu'il voudra , pourvu qu'il soit pairement pair , c'est-à-dire , divisible par 4 , puis faites prendre au second autant de fois 7 que le premier aura pris de fois 4 , & au premier autant de fois 13 . Après cela dites au premier de donner de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun , & au second de donner de ses jettons aussi aux deux autres autant qu'ils en auront chacun ; & enfin au troisieme de donner aussi de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun , il arrivera alors qu'ils auront chacun autant de jettons l'un que l'autre , & le nombre de chacun sera double de celui que le troisieme a pris au commencement. C'est pourquoi si vous demandez à l'une de ces trois personnes le nombre de ses jettons , la moitié de ce nombre sera le nombre des cartes ou des jettons que le troisieme avoit au commencement ; & si vous pre-



nez autant de fois 7 , & autant de fois 13 qu'il y aura de fois 4 dans le nombre du troisieme , vous aurez le nombre des cartes & des jettons que le second & le premier avoient pris.

Comme si le troisieme prend 8 cartes , le second en doit prendre 14 , sçavoir , deux fois 7 , parce que dans 8 il y a deux fois 4 , & le premier en doit prendre 26 , sçavoir , deux fois 13 , par la même raison. Si le premier , qui a 26 cartes , en donne 14 au second , qui en a aussi 14 , & 8 au premier qui en a aussi 8 , il lui en restera seulement 4 , le second en aura 28 , & le troisieme 16. Mais

|                  |                  |                  |                                  |
|------------------|------------------|------------------|----------------------------------|
| 1 <sup>e</sup> . | 2 <sup>e</sup> . | 3 <sup>e</sup> . | si le second , qui a 28 cartes , |
| 26               | 14               | 8                | en donne 4 au premier qui        |
| 4                | 28               | 16               | en a aussi 4 , & 16 au troi-     |
| 8                | 8                | 32               | sieme , qui en a aussi 16 , il   |
| 16               | 16               | 16               | lui en restera 8 , & le pre-     |
|                  |                  |                  | mier en aura 8 , & le troisieme  |
|                  |                  |                  | 32. Enfin si le troisieme , qui  |

a 32 cartes , en donne 8 à chacun des deux autres , qui en ont chacun 8 , ils en auront chacun 16 , qui est le double du nombre 8 des cartes que le premier a pris au commencement , &c.

## PROBLEME XXXI.

*De trois cartes inconnues , deviner celle que chacune des trois personnes aura prise.*

**I**L ne faut pas que le nombre des points de chacune des trois cartes , qui aura été prise , surpasse 9 ; & alors pour trouver ce nombre , dites à la première personne d'ôter 1 du double du nombre des points de sa carte , & qu'après avoir multiplié le reste par 5 , elle ajoute au produit le nombre des

points de la carte que la seconde personne aura prise. Après cela faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme, & ayant fait ôter 1 du double de cette seconde somme, faites multiplier le reste par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte que la troisieme personne aura prise. Enfin demandez la somme qui vient de cette derniere addition ; car si vous y ajoutez 5, vous aurez une autre somme composée de trois figures, dont la premiere vers la gauche sera le nombre des points de la carte que la premiere personne aura prise, celle du milieu sera le nombre des points de la carte de la seconde personne, & la derniere vers la droite fera connoître la carte de la troisieme personne.

Comme si le premier a pris un 3, le second un 4, & le troisieme un 7 ; en ôtant 1 du double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a cette somme 29, à laquelle si on ajoute 5, on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisieme, & 5 de plus, on a cette derniere somme 347, dont les trois figures représentent séparément les nombres des points de chaque carte.

*Autrement.*

Ayant dit au premier d'ajouter 1 au double du nombre des points de sa carte, faites multiplier la somme par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du second ; puis ayant fait encore ajouter 1 au double de la somme précédente,

faites multiplier le tout par 5 , & ajouter au produit le nombre des points de la carte du troisieme. Après cela demandez la somme qui viendra de cette derniere addition , d'où vous ôterez 55 , pour avoir au reste un nombre qui sera composé de trois figures , dont chacune représentera , comme auparavant , le nombre des points de chaque carte.

Comme, dans le même exemple , en ajoutant 1 au double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier , & en multipliant la somme 7 par 5 , on a 35 , auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second , on a 39 , dont le double est 78 , auquel ajoutant 1 , & multipliant la somme 79 par 5 , on a 395 , auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisieme , on a 402 , d'où ôtant 55 , il reste 347 , dont les trois figures représentent en particulier le nombre des points de chaque carte.

## P R O B L E M E X X X I I .

*Trois cartes ayant été présentées à trois personnes , deviner celle que chacune aura prise.*

**O**N doit sçavoir quelles cartes ont été présentées, c'est pourquoi nous appellerons l'une A, l'autre B, & la troisieme C. Mais on laisse la liberté aux trois personnes de choisir en particulier telle carte qu'il leur plaira. Quand ce choix, qui peut se faire en six manieres différentes , sera fait , donnez à la premiere personne ce nombre 12 , à la seconde ce nombre 24 , & à la troisieme ce nombre 36. Après cela dites à la premiere personne d'ajouter ensemble la moitié du nombre de celle qui a pris la carte A , le tiers du nombre de

218 RECREAT. MATHEM. ET PHYS.  
celle qui a pris la carte B, & le quart du nombre  
de celle qui a pris la carte C, & demandez-lui la

| 1 <sup>e</sup> . | 2 <sup>e</sup> . | 3 <sup>e</sup> . | Sommes. |
|------------------|------------------|------------------|---------|
| 12               | 24               | 36               |         |
| A                | B                | C                | 23      |
| A                | C                | B                | 24      |
| B                | A                | C                | 25      |
| C                | A                | B                | 27      |
| B                | C                | A                | 28      |
| C                | B                | A                | 29      |

somme qui sera ou 23, ou 24, ou 25, ou 27, ou 28, ou 29, comme vous voyez dans cette table, qui montre que si cette somme est 25, par exemple, la premiere personne aura pris la carte B, la seconde la carte A, & la troisieme la carte C; & que si cette somme est 28, la premiere personne aura pris la carte B, la deuxieme la carte C, & la troisieme la carte A. Ainsi des autres.

### P R O B L E M E XXXIII.

*Deviner entre plusieurs cartes, celle que quelqu'un aura pensé.*

**A**Yant pris à volonté dans un jeu de cartes, un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre sur une table à celui qui en veut penser une, commencez par celle de dessous, & mettez-les proprement l'une sous l'autre; puis dites-lui de se souvenir du nombre qui exprime la quantieme qu'il aura pensée; sçavoir, de 1, s'il a pensé la premiere; de 2, s'il a pensé la seconde; de 3, s'il a pensé la troisieme, &c. Mais en même tems comptez

secrètement celle que vous montrez, dont le nombre sera, par exemple, 12 ; & séparez-les adroitement du reste du jeu. Après cela mettez ces cartes, dont vous sçavez le nombre, dans une situation contraire, en commençant à mettre sur le reste du jeu la carte qui aura été mise la première sur la table, & en finissant par celle qui aura été montrée la dernière ; enfin ayant demandé le nombre de la carte pensée, que nous supposons être la quatrième, remettez à découvert vos cartes sur la table l'une après l'autre, en commençant par celle de dessus, à laquelle vous attribuez le nombre 4 de la carte pensée, en comptant 5 sur la seconde carte suivante, & pareillement 6 sur la troisième carte plus basse, & ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez prises au commencement ; car la carte sur laquelle tombera ce nombre 12, sera celle qui aura été pensée.

## P R O B L E M E   X X X I V .

*Plusieurs cartes différentes étant proposées successivement à autant de personnes, pour en retenir une dans sa mémoire, deviner ce que chacun aura pensé.*

**S'**il y a, par exemple, trois personnes, montrez trois cartes à la première personne, pour en retenir une dans sa pensée, & mettez à part ces trois cartes. Présentez aussi trois autres cartes à la seconde personne, pour en penser une à sa volonté, & mettez aussi à part ces trois cartes. Enfin présentez à la troisième personne trois autres cartes, pour lui faire penser celle qu'il voudra,

& mettez pareillement à part ces trois dernières cartes. Cela étant fait, disposez à découvert les trois premières cartes en trois rangs, & mettez dessus les trois autres cartes, & dessus celles-ci les trois dernières, pour avoir ainsi toutes les cartes disposées en trois rangs, dont chacun sera composé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque personne dans quel rang est la carte qu'il a pensée: alors il sera facile de connoître cette carte, parce que la carte de la première personne sera la première de son rang; de même la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang; enfin la carte de la troisième personne sera la troisième de son rang.

### P R O B L E M E   X X X V .

*Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.*

**I**L est évident que le nombre des cartes doit être divisible par 3, afin qu'on en puisse faire trois rangs égaux. Supposant donc qu'il y ait, par exemple 36 cartes, dont chaque rang en comprendra par conséquent 12, demandez en quel rang est la carte qu'on aura pensé, & ayant ramassé toutes les cartes, en sorte que le rang où sera la carte pensée, soit entre les deux autres rangs; disposez de nouveau ces 36 cartes en trois rangs égaux, en mettant la première au premier rang, la seconde au second, la troisième au troisième, puis la quatrième au premier rang, & pareillement la suivante au second rang, en continuant ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient rangées. Après quoi vous demanderez encore dans quel rang est la carte

pensée, & ayant ramassé de nouveau toutes les cartes, en sorte que le rang où sera la carte pensée, soit aussi entre les deux autres, vous ferez, comme auparavant, trois rangs égaux des mêmes cartes. Ayant enfin demandé dans quel rang est la carte pensée, vous connoîtrez aisément cette carte, parce qu'elle se trouvera au milieu de son rang; sçavoir, dans cet exemple, la sixieme. Ou bien, pour mieux cacher l'artifice, elle se trouvera au milieu de toutes les cartes, ou la dix-huitieme, lorsqu'on les aura ramassées comme auparavant; mais il faut faire en sorte que le rang où sera la carte pensée, soit toujours entre les deux autres.

### PROBLEME XXXVI.

*Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un jeu de carte.*

**A**Yant pris un jeu entier de 52 cartes, présentez-le à quelqu'un de la compagnie, qui tirera celle qu'il lui plaira, sans vous la montrer. Ensuite faisant valoir toutes les cartes selon leur valeur marquée, vous ferez valoir le valet 11, la dame 12, & le roi 13; puis comptant les points de toutes les cartes, vous ajouterez les points de la premiere carte aux points de la seconde, ceux-ci aux points de la troisieme, & ainsi de suite, vous rejetterez tous les 13, & garderez le reste pour l'ajouter à la carte suivante. On voit qu'il est inutile de compter les rois, qui valent 13. Enfin s'il reste quelques points à la derniere carte, vous ôterez ces points de 13, & le reste marquera les points de la carte qu'on aura tirée: en sorte que si le reste est 11, ce sera un valet qu'on aura tiré; si

le reste est 12 , ce sera une dame , &c. mais s'il ne reste rien , on aura tiré un roi. Vous connoîtrez quel est ce roi , en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut se servir d'un jeu composé seulement de 32 cartes , dont on se sert à présent pour jouer au piquet , on ajoutera tous les points des cartes , comme on vient de dire , mais on rejettera tous les 10 qui se trouveront en faisant cette addition. Enfin on ajoutera 4 au point de la dernière carte pour avoir une somme , laquelle étant ôtée de 10 , si elle est moindre , ou de 20 , si elle surpasse 10 , le reste sera le nombre de la carte qu'on aura tirée ; de sorte que s'il reste 2 , ce sera un valet ; s'il reste 3 , ce sera une dame ; & si le reste est 4 , on aura tiré un roi , &c.

Si le jeu de cartes est imparfait , on doit prendre garde aux cartes qui manquent , & ajouter à la dernière somme le nombre des points de toutes ces cartes qui manquent , après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il sera possible : & la somme qui viendra de cette addition , doit être , comme auparavant , ôtée de 10 , ou de 20 , selon qu'elle sera au-dessous , ou au-dessus de 10. Il est évident que si l'on regarde encore une fois les cartes , on pourra nommer celle qui aura été tirée.

## P R O B L E M E   X X X V I I .

*Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tirées d'un jeu de cartes entier.*

**D**ites à celui qui aura tiré à l'aventure deux cartes du jeu composé de 32 cartes , d'ajouter



à chacune des ses cartes, autant d'autres cartes que le nombre des ses points sera au-dessous de 25, qui est la moitié de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme si la première carte est un dix, on y ajoutera 15 cartes, & si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 18 cartes; ce qui fera en tout 33 cartes : de sorte que dans cet exemple il restera 17 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui restent du jeu, & trouvant qu'il en reste 17, ce nombre 17 sera le nombre de tous les points pris ensemble des deux cartes qu'on aura tirées.

Pour mieux cacher l'artifice, il ne faut point toucher aux cartes; mais il faut faire ôter le nombre des points de chacune des deux cartes qui ont été prises, de 26, qui est la moitié du nombre de toutes les cartes, & faire ajouter ensemble les deux restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'est-à-dire, de 52; car le nombre qui restera, sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un dix & un sept, en ôtant 10 de 26, il reste 16 & en ôtant 7 de 26, il reste 19, & en ajoutant ensemble les deux restes 16, 19, on a 35 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 52, il reste 17 pour le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées.

On fera la même chose avec un jeu de piquet, composé de 36 cartes, ou seulement de 32 cartes.

Mais pour cacher encore mieux l'artifice, au lieu de la moitié 26 de toutes les cartes, quand il y en a 52, prenez un autre nombre moindre, mais plus grand que 10, comme 24, duquel ôtant 10 &

7, il reste 14 & 17, dont la somme 31 étant ôtée de la somme 52 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 26 sur 24, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées; sçavoir, du dix & du sept.

Quand on se servira d'un jeu de piquet, composé de 36 cartes, au lieu de la moitié 18 du nombre 36 de toutes les cartes, on prendra pareillement un nombre moindre, comme 16, duquel ôtant 10 & 7, il reste 6 & 9, dont la somme 15 étant ôtée du nombre 36 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 18 sur 16, pour avoir au reste 17, le nombre des points des deux cartes qui ont été tirées.

Pareillement, si le jeu de piquet n'est que de 32 cartes, au lieu de la moitié 16 du nombre 32 de toutes les cartes, on prendra un nombre moindre tel que l'on voudra, pourvu qu'il soit plus grand que 10, comme 14, duquel ôtant 10 & 7, il reste 4 & 7, dont la somme 11 étant ôtée de 32, il reste 21, d'où il faut encore ôter 4, qui est le double de l'excès de 16 sur 14, pour avoir au reste 17, le nombre des points du dix & du sept qu'on a tiré.

### P R O B L E M E X X X V . I I I .

*Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tiré à volonté d'un jeu de cartes.*

I.

**P**Our résoudre ce problème comme le précédent, en suivant la voie la plus courte, il faut que le nombre des cartes dont le jeu est composé, soit

Soit divisible par 3 ; ainsi le jeu de 52 cartes , & celui de 32 cartes ne sont pas si convenables : celui de 36 cartes convient mieux , parce que 36 a pour troisième partie 12 , qui nous servira pour résoudre la question en cette sorte.

Dites à celui qui aura tiré à volonté trois cartes d'un jeu de piquet , composé de 36 cartes , d'ajouter à chacune de ces cartes , autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 11 , qui est le tiers du nombre de toutes les cartes , diminué de l'unité , en donnant , comme dans le problème précédent , à chaque carte figurée , tel nombre qu'on voudra. Comme si la première carte est un neuf , on y ajoutera 2 cartes ; si la seconde carte est un sept , on y ajoutera 4 cartes , & si la troisième carte est un six , on y ajoutera 5 cartes , ce qui fait en tout 14 cartes qu'on a tiré du jeu ; de sorte que dans cet exemple il restera 22 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui restent du jeu , & trouvant qu'il en reste 22 , ce nombre 22 fera connoître le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura tirées.

Ou bien sans toucher aux cartes , & pour mieux cacher l'artifice , faites ôter de 12 , qui est le tiers du nombre 36 de toutes les cartes , le nombre des points de chacune des trois cartes qu'on a prises , & faites ajouter ensemble les trois restes , pour avoir leur somme , que vous devez demander , afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes , c'est-à-dire , de 36 ; car le nombre qui restera , sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple , où l'on a supposé qu'on a pris un neuf , un sept & un six , ôtant 9 de 12 , il reste 3 ; ôtant 7 de 12 , il reste 5 ; enfin ôtant 6 de 12 , il reste 6 , & ajoutant ensemble les

trois restes 3, 5, 6, on a 14 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 36, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été tirées.

## II.

Pour mieux encore cacher l'artifice, & pour appliquer la règle à un jeu de plus ou de moins de 36 cartes, comme de 52 cartes, servez-vous d'un nombre plus grand que 10, & moindre que 17, tiers de 52, par exemple, de 15 : & dites à celui qui aura tiré les trois cartes, d'ajouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 15 ; comme si la première carte est un neuf, on y ajoutera 6 cartes, si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 8 cartes, & si la troisième carte est un six, on y ajoutera 9 cartes, ce qui fera en tout 26 cartes ; de sorte que dans cet exemple, il restera de tout le jeu 26 cartes. Prenant donc les cartes qui restent du jeu, & trouvant qu'il en reste 26, ôtez de 26 le nombre 4, qui est l'excès de 52, nombre de toutes les cartes sur le triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, sur 48, & le reste 22 sera le nombre de tous les points des trois cartes qui auront été tirées du jeu.

Ou bien sans toucher aux cartes, faites ôter le nombre des points de chacune des trois cartes qui auront été prises, de 16, qui surpasse de l'unité le premier nombre 15, & faites ajouter ensemble tous les restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre précédent 48 ; car le reste sera le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura prises.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un neuf, un sept & un six, en ôtant

9 de 16, il reste 7 ; ôtant 7 de 16, il reste 9 ; enfin ôtant 6 de 16, il reste 10, & ajoutant ensemble les trois restes 7, 9, 10, on a 26 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 48, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été prises.

Mais si vous voulez vous servir d'un jeu composé de 36 cartes, & prendre un nombre plus grand que 10, comme 15, après avoir ajouté les cartes, qui seront au nombre de 26, comme vous avez vu, ôtez 26 de 36, nombre de toutes les cartes, ajoutez au reste 10 ce nombre 12, qui est l'excès du triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, de 48, sur le nombre 36 de toutes les cartes, & la somme 22 sera le nombre des points qu'on cherche. Au lieu de 12, il faut ajouter 16, pour un jeu de piquet de 32 cartes, parce qu'ôtant 32 de 48, il reste 16.

### III.

A l'imitation de ce problème & du précédent, il sera aisé de résoudre la question pour quatre cartes qu'on aura tirées, & pour un plus grand nombre.

### REMARKES.

De quelque maniere qu'on exécute ce problème, soit avec un jeu entier de cartes, ou avec un jeu qui ne soit point entier, soit qu'on tire du jeu trois cartes ou davantage, soit enfin qu'après avoir tiré du jeu un certain nombre de cartes, on fasse accomplir 15, ou quelqu'autre nombre, comme 14, 13, 16, &c. selon ce qui a été dit dans l'article II. Voici la regle générale qu'on doit suivre.

Multipliez le nombre que vous faites accomplir par le nombre des cartes choisies; ajoutez au

produit ce même nombre des cartes choisies, & ôtez cette somme du nombre des cartes du jeu dont on se sera servi, comme de 52, si le jeu est entier, ou de 36, s'il n'est point entier, &c. le reste sera le nombre qu'il faudra ôter des cartes qui seront restées de tout le jeu. Le nombre des cartes restées après cette dernière soustraction exprimera le nombre des points des cartes choisies.

*Exemple.*

Supposé qu'on ait choisi dans un jeu entier 4 cartes, dont les points soient 3, 5, 7, 10, & qu'on ait fait accomplir les points de chacune jusqu'à 11, il faut multiplier 11 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 44 le même nombre 4; la somme sera 48, que vous ôterez de 52, nombre des cartes du jeu entier, il restera 4, qu'il faudra ôter de 29, nombre des cartes qui seront restées du jeu, après que celui qui aura choisi les quatre cartes en aura tiré 8, pour accomplir 11 avec les 3 points de la première carte, 6 pour accomplir 11 avec les 5 points de la seconde carte, 4 pour accomplir 11 avec les 7 points de la troisième carte, & 1 pour accomplir 11 avec les dix points de la quatrième: toutes ces cartes 8, 6, 4, 1, avec les 4 choisies, font 23, qui, étant ôtés de 52, donnent pour reste 29. Ayant donc ôté 4 de 29, le reste 25 marquera la somme des points des quatre cartes choisies, 3, 5, 7, 10.

Si après avoir ôté du nombre des cartes du jeu proposé, la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre des cartes choisies, par le nombre qu'on a fait accomplir, il ne reste rien, le nombre des cartes restées

de tout le jeu, exprimera le nombre des points des cartes choisies.

*Exemple.*

Qu'on ait choisi dans un jeu entier quatre cartes, dont les points soient 1, 3, 4, 7, & qu'on les ait fait accomplir jusqu'à 12, il faut multiplier 12 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 48, le même nombre 4; la somme sera 52, égale au nombre des cartes du jeu entier. Comme il ne reste rien, c'est une marque que le nombre des points des cartes choisies sera exprimé par le nombre des cartes restantes, qui est 15. Car pour accomplir 12 avec 1, point de la première carte, il faut 11 cartes; pour accomplir 12 avec les trois points de la seconde carte, il faut 9 cartes; pour accomplir 12 avec les 4 points de la troisième carte, il faut 8 cartes: enfin pour accomplir 12, avec les 7 points de la quatrième carte, il faut 5 cartes. Toutes ces cartes 11, 9, 8, 5, avec les 4 choisies font 37, qui étant ôtés de 52, donnent pour reste 15, nombre des points des cartes choisies, 1, 3, 4, 7.

Si la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre par le nombre qu'on a fait accomplir, se trouve plus grande que le nombre des cartes du jeu proposé, alors il faut soustraire de cette somme le nombre des cartes du jeu proposé, & le reste sera un nombre qu'il faudra ajouter au nombre des cartes restées, pour avoir le nombre des points des cartes choisies.

*Exemple.*

Si l'on avoit choisi dans un jeu de trente-six cartes, 3 cartes, dont les points fussent 4, 7, 9,

& qu'on se propose d'accomplir ces points jusqu'à 15, avec le nombre des cartes qu'on auroit tiré du jeu, il faudroit multiplier 15, nombre qu'on a fait accomplir, par 3, nombre des cartes choisies, le produit est 45, auquel on ajoutera 3, nombre des cartes choisies. La somme 48 est plus grande que 36, nombre des cartes du jeu proposé : il faut donc ôter 36 de 48, le reste 12 doit être ajouté au nombre des cartes restées, qui est 8 ; car on a dû tirer du jeu proposé 11 cartes, pour accomplir 15, avec les 4 points de la première carte ; 8 pour accomplir 15, avec les 7 points de la deuxième carte ; & 6 pour accomplir 15, avec les neuf points de la troisième carte : toutes ces cartes 11, 8, 6, avec les 3 choisies, font 28, qui étant ôtées de 36, nombre des cartes du jeu proposé, donnent pour reste 8. Ayant donc ajouté ces 8 cartes avec les 12, différence de 48, somme trouvée, à 36, nombre des cartes du jeu proposé, on aura 20 pour le nombre des points des cartes choisies 4, 7, 9.

Il faut observer 1°. qu'on peut faire accomplir tel nombre qu'on voudra, en comptant, les points de chaque carte jusqu'à ce nombre : il n'est pas même nécessaire de faire accomplir le même nombre avec les points des cartes choisies. Par exemple, on peut, avec les points des trois cartes choisies, faire accomplir trois différens nombres, comme 13, 14, 15, ; alors on ajoutera ensemble ces trois nombres, que l'on augmentera de 3, nombre des cartes choisies, & l'on achevera le reste comme on a dit.

Il faut 2°. prendre garde qu'il peut arriver que la somme des nombres qui vient, lorsqu'on a fait accomplir, est si grande, qu'il n'y aura point assez de cartes dans le jeu proposé pour les en tirer.



Néanmoins on résoudra le problème, si on fait de combien le nombre des cartes qu'on devroit retirer, surpasse celui des cartes du jeu proposé. Par exemple, si le nombre des cartes du jeu proposé étoit 36, qu'on eût fait accomplir 15, & que les trois cartes choisies fussent 2, 3, 4, il est certain qu'on ne pourroit pas retirer de 26 toutes les cartes, lorsqu'on auroit fait accomplir 15 avec tous les points de chacune des cartes; car il faudroit prendre 13 cartes pour accomplir 15 avec 2 points de la première carte, 12 pour la seconde, & 11 pour la troisième; mais ces trois nombres 13, 12, 11, avec 3, nombre des cartes choisies, font 39, qui est plus grand que 36. Il faudra donc sçavoir que 39 surpasse 36 de 3: alors on ôtera cet excès 3 de 12, autre excès de 36, nombre des cartes du jeu proposé à 48, somme de 3, nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre 3 par 15, nombre qu'on a fait accomplir; & le reste 9 est le nombre des points des trois cartes choisies, 2, 3, 4. Consultez Bachet, dans ses *problèmes plaisans & délectables*, où vous trouverez des démonstrations de plusieurs problèmes qu'on propose dans ces problèmes d'arithmétique.

## PROBLÈME XXXIX.

*De seize jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.*

**I**L faut disposer ces jettons en deux rangs, en sorte qu'il y en ait 8 en l'un & 8 en l'autre, comme on le voit dans la figure suivante. Ensuite il faut demander à celui qui aura pensé un jetton dans quel rang il est. S'il répond qu'il est dans le

rang A , levez les jettons de la rangée A , & disposez-les en deux rangées, dont l'une contiendra 4 jettons , & la seconde 4 autres, comme vous voyez en C & D , ayant laissé la rangée B sans y toucher. Demandez encore en quel rang est le jetton pensé. Si on dit qu'il est dans le rang C , levez le rang C & le rang D , de manière que les

| A | B | C | B | D | E | B | F | H | B | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ |   | ○ |   | ○ |   |   |   | ○ |   |
| ○ | ○ |   | ○ |   | ○ |   |   |   | ○ |   |
| ○ | ○ |   | ○ |   | ○ |   |   |   | ○ |   |
| ○ | ○ |   | ○ |   | ○ |   |   |   | ○ |   |

jettons d'un rang ne soient point confondus avec les jettons de l'autre rang , & faites-en deux autres rangs , comme vous voyez en E & F ; mais en les rangeant , faites que les jettons du rang C soient posés de côté & d'autre du rang B , en sorte que le premier du rang C soit le premier du rang E , le second du rang C , soit le premier du rang F , & le troisième du rang C , soit le second du rang E , puis le quatrième du rang C , soit le second du rang F , &c. Demandez encore en quel rang se trouve le jetton pensé ; & si on vous dit qu'il est dans le rang E , levez encore les jettons comme on vient de le dire & disposez-les de la même façon. Demandez enfin en quel rang est le jetton pensé : il doit occuper la première place du rang où l'on aura dit qu'il se trouve : comme dans cette figure, où le jetton italique est le premier de son rang.

## REMARQUE.

Il seroit plus aisé d'exercer ce problème avec des cartes, & on couvrirait davantage l'artifice, en battant les cartes, après avoir connu celle qui aura été pensée, & en les comptant pour la découvrir.

## PROBLÈME XL.

*Du jeu de l'anneau.*

C E jeu se peut pratiquer agréablement dans une compagnie composée de plusieurs personnes, dont le nombre ne doit pas être plus grand que 9, afin d'en pouvoir plus facilement appliquer le problème XXI. \* On fera valoir 1 la première personne, 2 la seconde, 3 la troisième, & ainsi de suite. On fera aussi valoir 1 la main droite, & 2 la main gauche. On donnera pareillement 1 au premier doigt d'une main, 2 au second, 3 au troisième, 4 au quatrième, 5 au cinquième. Enfin on donnera 1 à la première jointure, 2 à la seconde, & 3 à la troisième. Cela étant imaginé, si l'on fait mettre à l'une de ces personnes, par exemple à la cinquième, un anneau à la première jointure du quatrième doigt de sa main gauche, il est évident que pour deviner la personne qui aura pris cet anneau ou bague, & dire en quelle main, en quel doigt & en quel jointure il est, il n'y a qu'à deviner ces quatre nombres 5, 1, 4, 2, le premier 5 représentant la cinquième personne, le second 1 la première jointure, le troisième 4 le quatrième doigt, & le quatrième 2 la main gauche. Ce qui se fera en suivant la dernière méthode du problème XXI, \* comme vous allez voir.

Pag.  
163,  
art. IV.

Otant 1 de 10, double du premier nombre 5, & multipliant le reste 9, par 5, on a 45, auquel ajoutant le second nombre 1, on a cette somme 46, à laquelle si on ajoute 5, on a cette seconde somme 51, dont le double est 102, d'où ôtant 1, il reste 101, qui étant multiplié par 5, produit 505, auquel ajoutant le troisieme nombre 4, on a cette somme 509, à laquelle ajoutant encore 5, on a cette seconde somme 514, dont le double 1028, étant diminué de 1, & le reste 1027 étant multiplié par 5, produit 5135, auquel ajoutant le quatrieme nombre 2, on a cette somme 5137, à laquelle ajoutant 5, on a cette seconde somme 5142, dont les quatre figures représentent les quatre nombres qu'on cherche, & font connoître par conséquent que l'anneau est dans la premiere jointure du quatrieme doigt de la main gauche de la cinquieme personne.

*Autre maniere.*

On prendra pour premiere personne, celle qui est le plus à main gauche, comme cela se fait ordinairement; pour la seconde celle qui est après, pour troisieme celle qui est ensuite, & ainsi des autres. On ne fera point d'autre distinction entre les deux mains, que d'observer le même ordre en comptant pour premier doigt le petit doigt de la main droite, & pour le dixieme le petit doigt de la main gauche, ou d'une autre façon, suivant qu'on le trouvera plus commode. Enfin on distinguera par ordre les trois jointures de chaque doigt en commençant par celle qui est le plus proche de la racine du doigt, ou par celle qui est la plus proche du bout du doigt. Cependant comme il semble qu'il n'y a que deux jointures au pouce, il seroit

peut-être plus à propos de compter ces jointures par celle qui est la plus près de l'extrémité du doigt, & d'avertir qu'on commencera à compter par celle-là.

Cela étant supposé, dites que l'on double le nombre qui convient à la personne qui a la bague, & que l'on ajoute 5 à ce double ; dites ensuite qu'on multiplie le tout par 5, & que l'on ajoute à ce produit le nombre qui convient au doigt : cela étant fait, dites encore que l'on multiplie cette somme par 10, & que l'on ajoute au produit le nombre qui convient à la jointure où est la bague. Demandez enfin la somme de ces nombres.

Si vous ôtez secrètement de cette somme le nombre 250, le reste exprimera par les centaines le nombre de la personne qui a la bague, par les dizaines le quantième des doigts, & par les unités la jointure du doigt.

*Exemple.*

Je suppose que la septième personne de la compagnie ait la bague au neuvième doigt, c'est-à-dire, au doigt annulaire de la main gauche, & à la deuxième jointure de ce doigt. Faites doubler 7, le double sera 14, auquel vous ferez ajouter 5, la somme sera 19 : faites multiplier ces 19 par 5, le produit sera 95, auxquels faisant ajouter le nombre 9 qui convient au doigt, il viendra 104. Faites multiplier ce nombre 104, par 10, on aura pour produit 1040, auxquels faisant ajouter 2, qui convient à la jointure, la somme sera 1042 ; vous demanderez cette somme, & quand vous la sçauvez, vous en ôterez secrètement 250, il restera 792, dont le 7 exprimera la septième personne qui a la bague, le 9 marquera qu'elle est au neuvième doigt, & le 2 fera voir que c'est à la deuxième jointure.

## REMARQUE.

S'il y avoit un zero au rang des dixaines, ce seroit une marque que la bague se trouveroit au dixieme doigt : alors il faudroit ôter 1 du nombre des centaines, & le reste marqueroit le nombre qui convient à la personne qui auroit la bague.

## PROBLÈME XLI.

*Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.*

**O**N prend ordinairement quinze cartes, que l'on dispose en trois rangs, de maniere qu'il y en ait cinq en chaque rang. 1°. Les cartes étant ainsi rangées, & ayant demandé à celui qui en aura pensé une, en quel rang elle se trouve ; ramassez chaque rang, & assemblez-les en mettant dans le milieu celui où se trouvera la carte pensée. 2°. Disposez encore toutes les cartes en trois rangs, mettant la premiere, c'est-à-dire, celle de dessus, au premier rang, la suivante au second rang, la troisieme au troisieme rang, la quatrieme au premier rang, la cinquieme au second rang, & les autres de la même maniere, jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Puis ayant encore demandé en quel rang est la carte pensée, vous ramasserez, comme auparavant, chaque rang, & les rassemblerez, en mettant au milieu celui où se trouve la carte pensée. 3°. Vous rangerez encore les cartes de la même maniere qu'on vient de faire, & ayant demandé en quel rang se trouve la carte pensée ; vous serez assuré qu'elle sera la troisieme de ce même rang. 4°. Ayant reconnu la carte pensée, vous pou-

vez ramasser les rangs , en mettant encore au milieu celui où est la carte pensée ; pour lors elle se trouvera au milieu des quinze cartes , & de quelcôté que l'on commence à compter , elle se trouvera la huitieme. On peut aussi , après avoir reconnu la carte pensée , mêler les cartes , & montrer la carte pensée , en les découvrant l'une après l'autre.

*R E M A R Q U E S.*

On peut faire le même jeu avec un autre nombre de cartes , & en plusieurs façons différentes. On prendra , par exemple , seize cartes que l'on disposera en quatre rangs , à chaque rang on mettra quatre cartes. Après avoir sçu en quel rang est la carte pensée , on levera les rangs ; on retiendra dans sa mémoire celui où est la carte pensée , & on rangera les cartes de la maniere qu'on l'a dit , en sorte que les cartes des rangs précédens se sépareront , & que chacune se trouvera dans un autre rang : je veux dire que la premiere , ou celle de dessus les cartes levées , se trouvera au premier rang , la suivante se trouvera au second rang , la troisieme au troisieme rang , & la quatrieme au quatrieme rang. Ainsi les quatre cartes , qui étoient ensemble dans la disposition précédente , se trouveront dans les quatre rangs dans cette seconde disposition. Par conséquent , si l'on avoit mis le rang où se trouvoit la carte pensée au dessus des autres , on seroit assuré que cette carte est la premiere dans l'un des rangs de cette seconde disposition. Il sera donc très aisé de la deviner , quand on aura demandé en quel rang elle se trouve dans cette seconde disposition , puisqu'elle est infailliblement la premiere.

Mais si le rang où se trouvoit la carte dans la première disposition, avoit été mis au-dessous du premier des rangs levés, cette même carte se trouveroit la seconde dans l'un des rangs de la deuxième disposition. On juge bien qu'elle se trouveroit la troisième dans la seconde disposition, si le rang où elle se trouvoit en premier lieu, avoit été mis dans la troisième place des rangs levés, & qu'elle se trouveroit la quatrième de l'un des rangs de la seconde disposition, si ce rang levé avoit été mis à la quatrième place des rangs levés. /

### PROBLÈME XLII.

*Ayant un vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisième vase contenant trois pintes.*

**O**N propose ordinairement cette question de la sorte : Quelqu'un ayant une bouteille pleine de 8 pintes d'excellent vin, en veut faire présent de la moitié, ou de quatre pintes, à un de ses amis : mais pour la mesurer il n'a que deux autres bouteilles, dont l'une contient 5 pintes, & l'autre 3. On demande comment il doit faire pour mettre quatre pintes dans la bouteille qui en contient cinq.

Pour le sçavoir, appelons A la bouteille de 8 pintes ; B celle de 5, & C celle de 3 ; en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la bouteille A, & que les deux autres B, C, soient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, remplissez



# PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 235

la bouteille C, du vin de la bouteille B, où par conséquent il ne restera plus

|    |    |    |    |                                   |
|----|----|----|----|-----------------------------------|
|    | 8. | 5. | 3. | que 2 pintes, comme vous          |
|    | A. | B. | C. | voyez en F. Après cela versez     |
| D. | 8. | 0. | 0. | le vin de la bouteille C, dans la |
| E. | 3. | 5. | 0. | bouteille A, où par consé-        |
| F. | 3. | 2. | 3. | quent il y aura 6 pintes, com-    |
| G. | 6. | 2. | 0. | me vous voyez en G; & ver-        |
| H. | 6. | 0. | 2. | sez les 2 pintes de la bouteille  |
| I. | 1. | 5. | 2. | B, dans la bouteille C, où il y   |
| K. | 1. | 4. | 3. | aura deux pintes, comme vous      |
|    |    |    |    | voyez en H. Enfin ayant rem-      |

pli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il restera seulement 1 pinte, comme vous voyez en I; achevez de remplir la bouteille C, du vin de la bouteille B, où il restera 4 pintes, comme vous voyez en K, & ainsi la question se trouvera résolue.

## R E M A R Q U E.

Si au lieu de faire rester les quatre pintes de vin dans la bouteille B, vous voulez qu'elles restent dans la bouteille A, que nous

|    |    |    |    |                                  |
|----|----|----|----|----------------------------------|
|    | 8. | 5. | 3. | avons supposée remplie de huit   |
|    | A. | B. | C. | pintes, remplissez la bouteille  |
|    | 8. | 0. | 0. | C, du vin qui est dans la bou-   |
| D. | 5. | 0. | 3. | teille A, où alors il ne restera |
| E. | 5. | 3. | 0. | plus que 5 pintes, comme vous    |
| F. | 2. | 3. | 3. | voyez en D, & versez les         |
| G. | 2. | 5. | 1. | trois pintes de la bouteille C,  |
| H. | 7. | 0. | 1. | dans la bouteille B, où il y     |
| I. | 7. | 1. | 0. | aura par conséquent 3 pintes     |
| K. | 4. | 2. | 3. | de vin, comme vous voyez en      |

E. Puis ayant rempli la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne restera

plus que 2 pintes, comme vous voyez en F, achevez de remplir la bouteille B, du vin qui est dans la bouteille C, où il ne restera plus qu'une pinte, comme vous voyez en G. Enfin ayant versé le vin de la bouteille B, dans la bouteille A, où il se trouvera 7 pintes, comme vous voyez en H, versez la pinte de vin qui est en C, dans la bouteille B, où il y aura par conséquent une pinte, comme vous voyez en I, & remplissez la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne restera que 4 pintes, comme il étoit proposé, & comme vous voyez en K.

### P R O B L E M E X L I I I.

*Une personne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner 6 pintes au Frere quêteur ; il n'a pour les mesurer que deux autres bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les six pintes dans la bouteille de sept pintes ?*

C E problème est la même chose que le précédent, on l'exécutera aussi de la même manière. Soit nommée D la bouteille de 12 pintes, S celle de sept pintes, & C celle de cinq pintes. La bouteille D est pleine, & les deux autres S, C, sont vuides, comme on voit en G. Remplissez la bouteille C, du vin qui est en D, & la bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes, comme on voit en H. Puis versez dans S le vin que contient la bouteille C, qui demeurera vuide, & la bouteille S contiendra 5 pintes, comme on voit en I. Ensuite ayant rempli C, avec le vin qui est en D, la bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes, la  
bouteille

bouteille S, en contiendra 5, & la bouteille C sera pleine, comme on voit en K : après cela versez de la bouteille C, du vin dans

|    |     |    |    |                                |
|----|-----|----|----|--------------------------------|
|    | 12. | .  | 5. | la bouteille S, pour la rem-   |
|    | D.  | S. | C. | plir, & la bouteille D ne      |
| G. | 12. | 0. | 0. | contiendra encore que deux     |
| H. | 7.  | 0. | 5. | pintes, la bouteille S en con- |
| I. | 7.  | 5. | 0. | tiendra sept, & la bouteille   |
| K. | 2.  | 5. | 5. | C n'en contiendra plus que     |
| L. | 2.  | 7. | 3. | trois, comme on voit en L.     |
| M. | 9.  | 3. | 0. | Cela étant fait, vuidez S en   |
| N. | 4.  | 7. | 1. | D, & C en S, & il y aura       |
| P. | 11. | 1. | 0. | neuf pintes en D, trois pintes |
| Q. | 6.  | 6. | 0. | en S, & C sera vuide, comme    |
|    |     |    |    | on le voit en M. Ensuite rem-  |

plissez C de la bouteille D, & de C versez en S pour la remplir ; alors il y aura quatre pintes en D, sept pintes en S, & une pinte en C, comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les sept pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & D contiendra onze pintes, S en contiendra une, & C sera vuide, comme on le voit en P. Enfin ayant rempli de la bouteille D la bouteille C, qui contient cinq pintes ; & ayant versé ces cinq pintes de C dans la bouteille S, qui en contient déjà une, on trouvera que D contient six pintes, & que S en contient aussi six ; ainsi on est parvenu à ce qu'on souhaitoit.

## PROBLÈME XLIV.

*Partager à trois personnes vingt-un tonneau, dont il y en a sept vuides, sept pleins, & sept demi-pleins; de telle maniere que ces trois personnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.*

Cette question peut être résolue en deux manieres. On voit d'abord que chacune de ces personnes doit avoir sept tonneaux. On peut partager 7 en 3 parties, 2, 2, 3, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la premiere solution de la question.

*Premiere solution.*

Le premier de ces nombres 2 doit être appliqué à la premiere personne, qui prendra 2 tonneaux pleins, 2 tonneaux vuides, & par conséquent 3 à moitié pleins, pour en avoir 7. Le second nom-

|                      | pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Pers. | 2       | 2       | 3                     |
| 2 <sup>e</sup> Pers. | 2       | 2       | 3                     |
| 3 <sup>e</sup> Pers. | 3       | 3       | 1                     |

bre 2 s'appliquera à la deuxieme personne, qui prendra, comme la premiere, 2 tonneaux pleins, 2 vuides, & 3 demi-pleins. Enfin le troisieme nombre 3 s'appliquera à la troisieme personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 tonneaux vuides, & un tonneau demi-plein, pour en avoir 7. De cette maniere, ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

# PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 243

Le même nombre 7 peut être encore partagé en 3 autres parties, 3, 3, 1, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la deuxième solution de la question.

## Deuxième solution.

Le premier de ces nombres 3 s'appliquera à la première personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 vuides, & 1 à moitié plein, pour en avoir sept. Le deuxième nombre 3 s'appliquera à la seconde

|                      | pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Pers. | 3       | 3       | 1                     |
| 2 <sup>e</sup> Pers. | 3       | 3       | 1                     |
| 3 <sup>e</sup> Pers. | 1       | 1       | 5                     |

personne, qui prendra ses tonneaux comme la première personne. Enfin le troisième nombre 1 s'appliquera à la troisième personne qui prendra un tonneau plein, un tonneau vuide, & cinq à moitié pleins, pour en avoir sept. Ainsi ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

On a mis ici deux tables, que l'on peut distinguer en colonnes perpendiculaires, & en colonnes horizontales. Les colonnes perpendiculaires marquent la qualité des tonneaux qui doivent être distribués à chacune des trois personnes, & les colonnes horizontales, ou transversales, marquent la quantité des tonneaux, eu égard à leur qualité, qui doivent être distribués à chaque personne.

Il est évident que les trois personnes ont chacune 7 tonneaux, comme il paroît en ajoutant ensemble

ble les nombres qui se trouvent dans une colonne horizontale, & qui appartiennent à une seule personne. Il est aisé de reconnoître qu'elles ont autant de vin l'une que l'autre, en ajoutant les tonneaux pleins, avec la moitié des tonneaux demi-pleins d'une part, & les tonneaux vuides avec la moitié restante des tonneaux demi-pleins, ou plutôt demi-vuides, d'autre part, pour la même personne. On fera la même observation sur les exemples & les tables suivantes.

### REMARQUES.

La regle générale pour résoudre ces sortes de questions, est de diviser le nombre des tonneaux par le nombre des personnes. Si le quotient n'est pas un nombre entier, la question est impossible : mais si le quotient est un nombre entier, il faut partager ce quotient en autant de parties qu'il y a de personnes, avec cette condition, que chacune de ces parties sera plus petite que la moitié du quotient trouvé. Chaque personne prendra autant de tonneaux vuides que de pleins.

S'il étoit proposé de partager 21 tonneaux à 4 personnes, la question seroit impossible ; puisqu'on ne peut diviser exactement 21 par 4\*. Mais si on proposoit de partager à 4 personnes 24 tonneaux, avec les mêmes conditions ci-dessus, la question est très-possible ; car divisant 24 par 4, il vient au quotient 6, qui est un nombre entier, & 6 peut être divisé en ces quatre parties 2, 2, 1, 1, qui serviront à la solution de la question propo-

\* Pour partager également à quatre personnes 21 tonneaux, il faudroit en donner  $5\frac{1}{4}$  à chacune. On ne peut ainsi briser un tonneau en plusieurs pièces.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 245  
 fte , felon la table qu'on a ajoutée ici , où l'on voit

|                      | pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. | $\frac{1}{2}$ vuides. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Perf. | 2       | 2       | 1                     | 1                     |
| 2 <sup>e</sup> Perf. | 2       | 2       | 1                     | 1                     |
| 3 <sup>e</sup> Perf. | 1       | 1       | 2                     | 2                     |
| 4 <sup>e</sup> Perf. | 1       | 1       | 2                     | 2                     |

que les quatre personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette question n'a qu'une seule solution , parce que le nombre 6 ne peut être partagé en 4 autres parties , telles que la plus petite soit moindre que la moitié de lui-même.

On peut encore partager 27 tonneaux à trois personnes , avec les mêmes conditions que l'on a supposé dans les autres exemples : car 27 peut être exactement divisé par 3 , & le quotient est 9 ; mais ce nombre 9 peut être divisé en trois parties , dont chacune sera plus petite que la moitié de lui-même : ce qui se peut faire en trois manières diffé-

|                      | pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Perf. | 3       | 3       | 3                     |
| 2 <sup>e</sup> Perf. | 3       | 3       | 3                     |
| 3 <sup>e</sup> Perf. | 3       | 3       | 3                     |

rentes : car 9 peut être premièrement partagé en ces trois parties 3 , 3 , 3 , dont la somme fait 9. La table qui est ci-dessus montre ce que chacune des trois personnes doit avoir de tonneaux tant pleins que vuides & demi-pleins.

Ce même nombre 9 peut en second lieu être

246 RECREAT. MATHÉMAT. ET PURS.  
divisé en trois autres nombres 1, 4, 4, qui pris

|                      | Pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Pers. | 1       | 1       | 7                     |
| 2 <sup>e</sup> Pers. | 4       | 4       | 1                     |
| 3 <sup>e</sup> Pers. | 4       | 4       | 1                     |

ensemble font 9. Les trois personnes seront parta-  
gées de la manière qu'on le voit dans cette table.  
Enfin ce nombre 9 peut être partagé en ces trois  
autres nombres, 2, 3, 4, dont la somme est 9.

|                      | pleins. | vuides. | $\frac{1}{2}$ pleins. |
|----------------------|---------|---------|-----------------------|
| 1 <sup>e</sup> Pers. | 2       | 2       | 5                     |
| 2 <sup>e</sup> Pers. | 3       | 3       | 3                     |
| 3 <sup>e</sup> Pers. | 4       | 4       | 1                     |

Et les trois personnes seront partagées comme il est  
marqué dans la table qu'on a ici ajoutée.

On voit dans ces trois dernières tables que les  
trois personnes ont avant de tonneaux & de vin,  
l'une que l'autre.

## PROBLEME XLV.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvent sur-  
mer dans un même vaisseau ; il survient une fu-  
rieuse tempête. Après avoir jetté dans l'eau  
toutes les marchandises, le pilote dit qu'il est  
encore nécessaire d'y jeter la moitié des person-  
nes. Il les fait ranger de suite, & en comptant  
de neuf en neuf, il jette chaque neuvième dans  
la mer, en recommençant à compter le premier  
du rang, lorsque le rang est fini : il se trouve



*qu'après avoir jeté quinze personnes, les quinze Chrétiens sont restés. Comment a-t-il disposé les trente personnes pour sauver les Chrétiens ?*

**L**A disposition de ces trente personnes se tirera de ces deux vers françois.

*Mort, tu ne failliras pas,  
En me livrant le trépas.*

Il suffit de faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui se trouvent dans les syllabes des mots qui composent ces deux vers. On doit supposer que A vaut 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, & U vaut 5. On commencera à ranger des Chrétiens, puis des Turcs, & ainsi de suite, en notant alternativement des Chrétiens & des Turcs, jusqu'à ce qu'on ait rangé les trente personnes. Cela étant supposé, l'O, qui est dans la première syllabe (mort) fait connoître qu'on doit ranger d'abord 4 Chrétiens; l'U, qui est dans la seconde syllabe (tu) montre qu'on doit ranger ensuite 5 Turcs; l'E, qui est dans la troisième syllabe (ne) fait voir qu'on doit disposer 2 Chrétiens; l'A, de la quatrième syllabe (fail) montre qu'on doit mettre ensuite 1 Turc; l'I de la cinquième syllabe fait connoître qu'on doit ranger 3 Chrétiens, & ainsi des autres, en appliquant les voyelles de chaque syllabe aux nombres qu'on leur a attribué.

**R E M ■ R Q U E.**

Au lieu des deux vers françois, on peut employer ce vers latins, où l'on trouve les mêmes voyelles dans le même ordre.

*Populeam virgam mazer regina ferebas.*

Q JV

On donnera ici plus d'étendue à ce problème, afin qu'il puisse être utile aux capitaines, qui ayant plusieurs soldats à punir, sont obligés de les faire décimer. Par ce moyen ils feront tomber le sort sur les plus coupables, en les rangeant de la manière que nous allons enseigner.

La règle est d'écrire autant de zeros, qu'il y a de personnes coupables, & commençant à compter par le premier zero de marquer avec une croix le quatrième qu'on voudra punir, & de faire la même chose en recommençant le rang, & passant les zeros-marqués jusqu'à ce qu'on ait marqué le nombre qu'on souhaite punir. Il faudra disposer les soldats de la même manière qu'on a rangé les zeros, & mettre les plus coupables au lieu où se trouveront les zeros marqués de la croix.

Par exemple, si trente-six soldats sont coupables, & qu'on en veuille punir six des plus coupables en les décimant, c'est-à-dire, en les comptant dix à dix, pour faire punir chaque dixième, on les rangera comme on voit ces trente-six zeros rangés, & on aura soin de faire mettre les plus coupables à la place où l'on voit des croix sur les zeros.

```

o o o o o o o o o o o o o o o o o
      +               +               +
o o o o o o o o o o o o o o o o o
    +       +               +

```

Il est aisé d'appliquer cette règle à quelque nombre que ce soit, & à quelque quantité qu'on veuille rejeter d'un nombre déterminé.

On prétend que c'est en pratiquant cette règle, que Jofephe, l'historien juif, resta seul avec un autre, de quarante & un qu'ils étoient dans une caverne, où ils s'étoient retirés après la prise de

Jotapata , par Vespasien. L'histoire en est assez curieuse pour la rapporter ici : je ne ferai que la copier de la préface de Bachet sur ses *problèmes plaisans & délectables* , après l'avoir conféré avec ce qu'en dit lui-même Joseph, dans son histoire de la guerre des juifs , liv. 3, chap. 14.

« Hegeſipus , dit Bachet , rapporte au troiſieme  
 » livre de la priſe de Jérusalem, la mémorable  
 » hiſtoire de Joseph , qui étant gouverneur dans  
 » la ville de Jotapata , lorsqu'elle fut aſſiégée , &  
 » un peu après emportée d'aſſaut , par Vespasien ,  
 » fut contraint de ſe retirer dans *une caverne qui*  
 » *étoit au fond d'une ſoſſe* , où il trouva quarante  
 » braves guerriers , pour éviter la fureur des armes  
 » victorieuſes des Romains. Mais il fut expoſé à  
 » un plus grand péril parmi les ſiens , que parmi les  
 » ennemis ; car comme il eut arrêté de ſ'aller ren-  
 » dre à la diſcrétion du vainqueur , ne pouvant  
 » imaginer aucun autre moyen de ſe garantir de la  
 » mort , il trouva ſes ſoldats ſaiſis d'une telle fré-  
 » néſie , qu'ils vouloient tous mourir , & ſ'entre-  
 » tuer les uns les autres , plutôt que de prendre ce  
 » parti. Joseph ſ'eſſorça de les détourner d'une ſi  
 » malheureuſe entrepriſe ; mais ce fut en vain : car  
 » rejetant tout ce qu'il put alléguer au contraire ,  
 » & perſiſtant en leur opinion , ils en vinrent juſ-  
 » ques-là que de ſe menacer que , ſ'il ne ſ'y portoit  
 » volontairement , de l'y contraindre par force , &  
 » de commencer par lui-même l'exécution de leur  
 » tragique deſſein. Alors ſans doute c'étoit fait de  
 » ſa vie , ſ'il n'eût eu l'eſprit de ſe défaire de ces  
 » furieux , par l'artifice de mon vingt-troiſieme pro-  
 » blême : car feignant d'adhérer à leur volonté , il  
 » ſe conſerva l'autorité qu'il avoit ſur eux , & par  
 » ce moyen leur perſuada facilement que , pour

» éviter le désordre & la confusion qui pourroient  
 » survenir en un tel acte, s'ils s'entre-tuoient à la  
 » foule, il valoit mieux se ranger par ordre en  
 » quelque façon, & commençant à compter par  
 » un bout, massacrer toujours le tantieme (l'au-  
 » teur n'exprime pas le quantieme) jusqu'à ce qu'il  
 » n'en demeurât qu'un seul, lequel seroit obligé  
 » de se tuer lui-même. Tous en étant demeurés  
 » d'accord, Joseph les disposa de cette sorte, &  
 » choisit pour lui une si bonne place, que la rue-  
 » rie étant continuée jusqu'à la fin, il demeura seul  
 » avec un autre, qu'il sauva apparemment de la  
 » même manière, parce qu'il pouvoit en attendre  
 » une entière & parfaite obéissance ».

Bachet nous instruit lui-même, dans son vingt-troisième problème, de la manière dont Joseph a pu s'y prendre pour se sauver lui-même avec un de ses compagnons. Comme il y avoit quarante soldats avec Joseph dans cette caverne, ce qui faisoit en tout quarante & une personnes, on peut supposer qu'il ordonna que comptant de trois en trois on tueroit toujours le troisième. Cela étant supposé, il est aisé de connoître par la règle, qu'il se mit le trente & unieme, & qu'il fit mettre en la seizieme place celui qu'il voulut sauver.

### PROBLÈME XLVI.

*Trois choses ayant été distribuées secrettement à trois personnes, deviner celle que chacun aura pris.*

**Q**ue ces trois choses soient une bague, un écu, & un gand; vous vous représenterez la bague par la lettre A, l'écu par E, & le gand par I. Que les trois personnes soient Pierre, Si-

mon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangés que l'un , comme Pierre , sera le premier , Simon le second , & Thomas le troisieme. Ayant fait ces dispositions en vous même , vous prendrez vingt-quatre jettons , dont vous donnerez un à Pierre , deux à Simon , & trois à Thomas ; vous laisserez les dix-huit autres sur la table : ensuite vous vous retirerez de la compagnie , afin que les trois personnes se distribuent les trois choses proposées sans que vous le voyiez. Cette distribution étant faite , vous direz que celui qui a pris la bague prenne , des dix-huit jettons qui sont restés , autant de jettons que vous lui en avez donné : que celui qui a pris l'écu prenne des jettons restés deux fois autant de jettons que vous lui en avez donné : enfin que celui qui a pris le gaud , prenne sur le reste des jettons quatre fois autant de jettons que vous lui en avez donné [ dans notre supposition Pierre en aura pris un , Simon quatre , & Thomas douze ; par conséquent il ne sera resté qu'un jetton sur la table ]. Cela étant fait , vous reviendrez , & vous connoîtrez par ce qui sera resté de jettons la chose que chacun aura pris , en faisant usage de ce vers françois.

1        2        3        5        6        7  
*Par ser Cesar jadis desint si grand prince.*

Pour pouvoir se servir des mots de ce vers , il faut sçavoir qu'il ne peut rester qu'un jetton , ou 2 , ou 3 , ou 5 , ou 6 , ou 7 , & jamais 4 ; il faut de plus faire attention que chaque syllabe contient une des voyelles , que nous avons dit représenter les trois choses proposées : enfin il faut considérer ce vers , comme n'étant composé que de sept mots , & que la premiere syllabe de chaque

mot représente la première personne, qui est Pierre, & la seconde syllabe représente la seconde personne, qui est Simon. Cela bien conçu, s'il ne reste qu'un jetton, comme dans notre supposition, vous vous servirez du premier mot; ou plutôt des deux premières syllabes. *Par ser*, dont la première qui contient A, fait voir que la première personne, ou Pierre, a la bague représentée par A; & la seconde syllabe, qui contient E, montre que la seconde personne, ou Simon, a l'écu représenté par E; d'où vous conclurez facilement que la troisième personne, ou Thomas, a le gant.

S'il restoit 2 jettons, vous consulteriez le second mot *Cesar*, dont la première syllabe, qui contient E, feroit connoître que la première personne auroit l'écu représenté par E; & la seconde syllabe, qui contient A, montreroit que la seconde personne auroit la bague représentée par A: d'où il seroit aisé de conclure que la troisième personne auroit le gant. En un mot, selon le nombre des jettons qui resteront, vous employerez le mot du vers qui sera marqué du même nombre.

### R E M A R Q U E S.

Au lieu du vers françois qu'on a rapporté on peut se servir de ce vers latin.

1      2      3      5      6      7  
*Salve certa anima semita vita quies.*

Ce problème peut être exécuté un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à plus de trois personnes: ceux qui voudront en être plus particulièrement instruits, consulte-

**PROBLEMES D'ARITHMETIQUE** 253  
sont Bachet, dans le vingt-cinquieme de ses problèmes plaisans & délectables.

### PROBLEME XLVII.

*Trois personnes ont un certain nombre d'écus. La premiere donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enfin la troisieme en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.*

**L**A premiere personne avoit 13 écus, la seconde 7, & la troisieme 4; ce qu'il est aisé de reconnoître en distribuant les écus de chaque personne, suivant ce qui est énoncé dans le problème.

### R E M A R Q U E.

L'agebre donne aisément la résolution de ce problème. Ceux qui commencent à l'apprendre, pourront s'exercer à la trouver, & à former d'autres problèmes sur ce modele. Comme si la premiere personne donne trois fois autant d'écus aux deux autres qu'elles en ont, &c. & qu'au lieu de déterminer le nombre égal d'écus que chaque personne a à la fin, ils le laissent indéterminé, ils trouveront des solutions à l'infini. Ils reconnoîtront aussi que ce problème quarante-septieme est le fondement du trentieme.

## PROBLEME XLVIII.

*Il se trouve trois personnes dans une compagnie , la seconde est plus âgée que la première de douze ans , la troisième est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.*

**I**L faut ajouter les deux différences des âges donnés , qui sont ici 12 & 25 [ car la troisième personne ayant 13 ans plus que la seconde, il faut joindre la différence de ses années avec celle des années de la seconde ]. La somme de ces deux différences est 37 , qu'il faut ôter de la somme totale 100 , le reste 63 sera divisé par 3 , nombre des personnes dont on veut sçavoir les âges : le quotient 21 est l'âge de la première personne ; par conséquent 33 est l'âge de la seconde , & 46 l'âge de la troisième. Ces trois nombres 21 , 33 , 46 font ensemble 100.

## PROBLEME XLIX.

*Découvrir si un ouvrage que l'ouvrier assure être de pur or , est mêlé d'argent , sans l'endommager.*

**V**itruve rapporte que le roi Hieron voulant faire faire une couronne d'or d'un poids considérable , donna la matière à un orfèvre. La couronne fut très-bien faite , & elle se trouva être d'un poids égal à l'or qui avoit été fourni : on appréhenda cependant que l'orfèvre n'eût volé de l'or , & n'y eût mêlé de l'argent. Archimede fut



chargé de découvrir la fraude , sans endommager la couronne ; il le fit en plongeant entièrement la couronne dans un vase plein d'eau , & en pesant exactement la quantité d'eau qui en étoit sortie , il plongea aussi entièrement dans le même vase plein d'eau deux masses , l'une d'or & l'autre d'argent , & pesa exactement la quantité d'eau qu'avoient fait sortir du vase ces deux masses , qui y avoient été plongées l'une après l'autre , il trouva que la masse d'or pur avoit fait sortir une plus petite quantité d'eau que la couronne d'or , & que la couronne d'or en avoit fait sortir une plus petite quantité que la masse d'argent.

Le même auteur ne dit point quelle étoit la quantité de l'or , ni quel fut le raisonnement d'Archimède pour découvrir la tromperie de l'orfevre ; Mais on peut supposer que la couronne pesoit 20 marcs ; qu'ayant été plongée dans un vaisseau plein d'eau , elle en fit sortir 13 marcs d'eau ; que la masse d'or pur & d'égal poids n'en fit sortir que 12 marcs d'eau ; qu'enfin la masse d'argent en fit sortir 18 marcs d'eau.

Cela supposé , on découvrira par la regle de fausse position , ou par quelques équations algébriques , que l'orfevre avoit mêlé 3 marcs & un tiers d'argent dans la couronne. Voyez l'abrégé de l'arithmétique d'Irson , page 395 , on y trouvera la solution de plusieurs questions par algebre.

## P R O B L E M E L.

*Un boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes , sçavoir , des bœufs , des veaux , des brebis & des cochons. Le commissionnaire lui amène cent bêtes : il a payé p écus de cha-*

*que bœuf, 1 écu de chaque veau, 30 sols de chaque brebis, & 3 écus de chaque cochon. On demande combien il a amené de bœufs, de veaux, de brebis & de cochons.*

**C**E problème est capable d'un grand nombre de résolutions; c'est ce qui fait qu'on ne peut déterminer précisément le nombre de chaque sorte de bêtes que le commissionnaire a amené. Il pourroit avoir amené 3 bœufs, 44 veaux, 52 brebis & un cochon, qui font en tout 100 bêtes: le prix des bœuf est 27 écus, le prix des veaux est 44 écus, le prix des brebis est 26 écus, & le prix du cochon est 3 écus: tous ces prix font ensemble 100 écus, selon les conditions du problème. On peut dire encore qu'il a amené 4 bœufs, 17 veaux, 76 brebis, & 3 cochons: ce qu'on pourra vérifier par le prix de chaque sorte de bêtes, qu'on a déterminé dans les conditions du problème: ou bien 5 bœufs, 5 veaux, 88 brebis, & deux cochons, &c.

## P R O B L E M E L I.

### Q U E S T I O N I.

*Un particulier a fait marché avec un ouvrier pour creuser un puits de 20 toises de profondeur, à condition de lui donner 30 livres, quand il aura achevé ce puits. L'ouvrier tombe malade, après avoir creusé 12 toises. On demande combien il est dû à cet ouvrier.*

**I**L est dû à cet ouvrier 11 livres &  $\frac{1}{7}$ . Pour résoudre cette question, & les autres de même nature, il faut faire une règle de trois, dont le premier

## PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE. 257

Premier terme sera la somme des toises de la progression arithmétique depuis 1 jusqu'à 20, que l'on trouvera \* être ici 210; le second terme sera la somme dont on est convenu, qui est dans cette question 30 livres, & le troisième terme sera la somme des termes depuis 1 jusqu'à 12, que l'on trouvera \* être ici 78; car il est constant, qu'il y a plus de peine à creuser les toises plus avancées, que celles qui le sont moins, & cela en proportion arithmétique.

\* Par le probl. x  
arr. 1,  
P. 59.

## QUESTION II.

*Un tailleur a pris six aulnes de drap qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet: on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.*

**O**N prendra neuf aulnes de cette étoffe, qui n'a qu'une demi-aulne de large. Cette question paroît embarrassante; il faut s'y conduire avec quelque précaution. Elle se réduit à une règle de trois inverse, qu'on peut énoncer de cette façon. Si  $\frac{3}{4}$  donnent 6 aulnes, combien  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{2}{4}$ ? On exprime la demi-aulne par  $\frac{2}{4}$ , afin que le troisième terme soit analogue au premier. Pour résoudre cette question ainsi énoncée, il ne faut point avoir égard au dénominateur 4, qui est le même dans les deux fractions, il suffit de multiplier 6 aulnes par 3, numérateur de la première fraction, & de diviser le produit 18 par 2, numérateur de l'autre fraction.

## R E M A R Q U E S.

Il y a certaines questions qui se résolvent par l'attention que l'on fait à la chose exprimée, & à la manière dont elle est exprimée : on en donnera quelques exemples dans les articles suivans.

## I.

Un rôtiſſeur achete 20 perdrix, 8 livres, à raison de 2 livres les cinq; un autre rôtiſſeur de ſes voiſins a beſoin de perdrix, il le prie de lui en vendre quelques-unes au prix courant. Que doit faire le rôtiſſeur pour les vendre au même prix, & y gagner? Il doit en faire deux parts, en ſéparant les dix meilleures d'avec les autres qui ne ſont pas ſi bonnes. Il vendra la paire des meilleures une livre, & trois des moindres une livre auſſi : ces cinq vaudront 2 livres, qui eſt le prix courant. De cette manière le rôtiſſeur vendra 3 livres les dix perdrix graſſes, & des dix moindres il en vendra neuf pour 3 livres; de ſorte qu'il lui reſtera une perdrix pour le gain.

## II.

On demande le juſte prix d'un cent peſant de cordage goudronné; ſuppoſant que le cent peſant de chanvre coûte 16 livres, & qu'on paye 52 ſols 6 deniers pour la peine de l'eſpader, peigner & filer. On ſuppoſe en ſecond lieu que le cent peſant de chanvre diminue de 8 livres dans ſa réduction, ou conversion en fil blanc, & qu'on donne 4 ſols 9 deniers pour la peine de goudronner

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 259

le cent pesant de fil blanc. On suppose en troisieme lieu que le cent pesant de fil blanc ne prend que 20 livres de goudron par cent ; que la livre de goudron vaut 8 deniers , & qu'on paye 16 sols pour la peine de le corder.

*Solution.*

Je mets en une somme 16 livres, & 52 sols 6 deniers, c'est-à-dire, le prix du chanvre & de sa façon, pour le réduire en fil blanc; cela fait 18 livres 12 sols 6 deniers: ce sera le prix de 92 livres de fil blanc seulement, à cause des 8 livres de déchet en le façonnant. Je dis: si 92 livres de fil blanc coûtent 18 livres 12 sols 6 deniers, combien coûteront 100 livres du même fil blanc? Il vient 20 livres 4 sols 10 deniers, &  $\frac{1}{3}$  de denier, pour la valeur du cent de fil blanc prêt à goudronner.

Il ne reste donc plus qu'à ajouter à cette somme les 4 sols 9 deniers pour la peine de goudronner le cent pesant de fil blanc; il faut encore y ajouter 13 sols 4 deniers pour les 20 livres de goudron à 8 deniers la livre: ces trois sommes ajoutées ensemble font 21 livres 2 sols 11 deniers  $\frac{1}{3}$  de denier, pour le prix de 100 livres de fil goudronné.

Il faut ensuite dire: si 100 livres de fil goudronné coûtent 21 livres 2 sols 11 deniers, &  $\frac{1}{3}$  de denier, combien coûteront 100 livres? Il viendra 17 livres 12 sols 5 deniers, &  $\frac{103}{138}$  de denier, pour la valeur du cent pesant de fil goudronné, auquel ajoutant 16 sols pour la peine de le corder, on aura 18 livres 8 sols 5 deniers, &  $\frac{193}{138}$  de denier,

R ij

pour la valeur juste du cent pesant de cordage goudronné.

Cet exemple est extrait de l'arithmétique universelle : on a cru qu'il étoit assez curieux pour trouver ici sa place.

## PROBLEME LII.

*Faire parcourir au cavalier du jeu des échecs toutes les cases du damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case.*

**O**N sçait que le cavalier du jeu des échecs a une marche toute particulière ; il va, pour ainsi dire, en caracolant ; & il passe d'une case d'un rang à une case d'un autre rang, en sautant par-dessus deux cases, & allant du blanc au noir, & du noir au blanc.

### I.

Ce problème peut recevoir un grand nombre de solutions ; il est assez considérable pour avoir mérité l'attention de quelques grands géomètres. Il est vrai qu'ils n'en ont point donné de solution générale : c'est ce qui marque la difficulté qu'il y a à la trouver ; ils en ont cependant communiqué quelques-unes particulières : on ne rapportera ici que trois de ces solutions ; dans les deux premières, on commence à faire partir le cavalier de la case d'un angle du damier, & dans la troisième on commence à le faire partir de l'une des quatre cases qui sont au milieu du damier ; cette dernière manière de résoudre le problème proposé est plus difficile à trouver que les autres.

La première est de M. de Montmort, auteur

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE. 261

de l'essai de l'analyse sur les jeux de hasard ; la  
seconde est de M. Moivre, Anglois ; la troisieme  
est de M. de Mairan, directeur de l'académie  
royale des sciences, \* à qui je dois le problème, \* 1721.  
& les trois solutions qu'on trouve ici.

Les tables suivantes représentent un damier ;  
on a mis des nombres dans les cases que le cava-  
lier doit parcourir l'une après l'autre. Ainsi dans  
la maniere de M. Montmort, le cavalier se place  
d'abord sur la premiere case d'en haut, qui est au  
côté gauche : de-là on le fait passer à la troisieme  
case du second rang horizontal, où l'on a marqué 2 ;  
ensuite on le fait sauter dans la cinquieme case du  
premier rang horizontal marqué 3 ; après on le fait  
passer dans la septieme case du second rang hori-  
zontal marqué 4 : on continue à le faire aller dans  
les cases qui sont marquées des nombres selon leur

I. de M. de Montmort.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 38 | 31 | 44 | 3  | 46 | 29 | 42 |
| 32 | 35 | 2  | 39 | 30 | 43 | 4  | 47 |
| 37 | 8  | 33 | 26 | 45 | 6  | 41 | 28 |
| 34 | 25 | 36 | 7  | 40 | 27 | 48 | 5  |
| 9  | 60 | 17 | 56 | 11 | 52 | 19 | 50 |
| 24 | 57 | 10 | 63 | 18 | 49 | 12 | 53 |
| 61 | 16 | 59 | 22 | 55 | 14 | 51 | 20 |
| 58 | 23 | 62 | 15 | 54 | 21 | 54 | 13 |

ordre naturel , jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la  
cinquieme case du dernier rang horizontal d'en  
bas, marquée 64, qui est la derniere où il arrive,

262 RECREAT. MATHÉMAT. ET PHYS.  
 après avoir passé dans toutes les cases les unes  
 après les autres.

On fera la même observation dans les deux  
 autres tables; on suivra l'ordre naturel des nom-  
 bres, pour conduire le cavalier dans toutes les  
 cases.

II. de M. de Moivre,

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 14 | 49 | 22 | 11 | 36 | 39 | 24 | 1  |
| 21 | 10 | 35 | 50 | 23 | 12 | 37 | 40 |
| 48 | 33 | 62 | 57 | 38 | 25 | 2  | 13 |
| 9  | 20 | 51 | 54 | 63 | 60 | 41 | 26 |
| 32 | 47 | 58 | 61 | 56 | 53 | 14 | 3  |
| 19 | 8  | 55 | 52 | 59 | 64 | 27 | 42 |
| 46 | 31 | 6  | 17 | 44 | 29 | 4  | 15 |
| 7  | 18 | 45 | 30 | 5  | 16 | 43 | 28 |

III. de M. de Mairan.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 40 | 9  | 26 | 53 | 42 | 7  | 64 | 29 |
| 25 | 52 | 41 | 8  | 27 | 30 | 43 | 6  |
| 10 | 39 | 24 | 57 | 54 | 63 | 28 | 31 |
| 23 | 56 | 51 | 60 | 1  | 44 | 56 | 2  |
| 50 | 11 | 38 | 55 | 58 | 61 | 32 | 45 |
| 37 | 22 | 59 | 48 | 19 | 2  | 15 | 4  |
| 12 | 49 | 20 | 35 | 14 | 17 | 46 | 33 |
| 31 | 36 | 13 | 18 | 47 | 34 | 3  | 16 |



Il suffit de jeter les yeux sur ces trois tables, pour connoître la marche qu'on doit faire tenir au cavalier, lorsqu'on l'a placé sur l'une des cases marquées 1. On peut choisir telle autre case qu'il plaira, & rechercher soi-même par quelles cases passera le cavalier, pour les lui faire parcourir toutes l'une après l'autre, quand on l'aura placé sur la case qui aura été choisie.

## II.

### *Premiere maniere.*

Pour exécuter ce problème sur un damier, il faut mettre un jetton sur chaque case, en sorte que toutes les cases blanches & noires soient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la case où l'on placera d'abord le cavalier, & à mesure qu'on le fera entrer dans une autre case, on ôtera le jetton qui la couvre. Ainsi on sera sûr d'avoir fait parcourir toutes les cases au cavalier, quand tous les jettons auront été levés.

### *Seconde maniere.*

Au lieu de couvrir d'abord de jettons toutes les cases, on peut ne couvrir chaque case, qu'à mesure qu'on y fait passer le cavalier, & quand toutes les cases seront couvertes, on sera assuré d'avoir exécuté le problème.

## III.

La méthode de M. Moivre a paru la plus simple; c'est ce qui a engagé à la développer : mais afin de faire voir l'ordre qu'il a suivi, je vais séparer & décomposer, pour ainsi dire, les nombres

marqués dans les cases du second carré précédent, & donner trois autres carrés, par le moyen desquels j'espère qu'il sera aisé de retenir cette manière, pour la pratiquer sur le champ, sans avoir besoin de consulter aucun modèle.

Soit donc le carré ABCD, divisé en 64 carrés, qui représentent les cases d'un damier.

J'appelle les bandes ou les rangs AB, BD, AC, CD, *premières bandes*, ou *premiers rangs en dehors*. J'appelle encore les bandes EG, KL, HM, IN, *secondes bandes*, ou *seconds rangs en dehors*, par rapport aux premiers rangs en dehors, qu'on vient d'indiquer; & ainsi des autres, à mesure qu'on rentre dans le milieu du carré.

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|---|--|
|   |    | H  |    |    |    | I  |    |    |   |  |
| A | .  | .  | 22 | 11 | .  | .  | 24 | 1  | B |  |
| E | 21 | 10 | .  | .  | 23 | 12 | .  | .  | G |  |
|   | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 2  | 13 |   |  |
|   | 9  | 20 | .  | .  | .  | .  | .  | .  |   |  |
|   | .  | .  | .  | .  | .  | .  | 14 | 3  |   |  |
|   | 19 | 8  | .  | .  | .  | .  | .  | .  |   |  |
| K | .  | .  | 6  | 17 | .  | .  | 4  | 15 | L |  |
| C | 7  | 18 | .  | .  | 5  | 16 | .  | .  | D |  |
|   |    | M  |    |    |    | N  |    |    |   |  |

1°. On peut placer indifféremment le cavalier sur la case de l'un des quatre angles du carré. On commencera à le placer ici sur la case de l'angle

D, suivant le modele qui m'a été communiqué par M. de Mairan; de la case B marquée 1, on ira à la case marquée 2 dans la seconde bande IN; de-là on placera le cavalier à la case marquée 3 du premier rang en dehors BD, d'où ou viendra à la case marquée 4 du second rang IN; puis à la case marquée 5 du premier rang en dehors CD, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case 12, en faisant le tout du damier, sans sortir des deux premieres bandes en dehors.

2°. Quand on sera parvenu à la case marquée 12, on recommencera un second tour du damier dans le même sens qu'on vient de le faire. Ainsi de la case marquée 12, on ira à la case marquée 13 du premier rang BD; de 13 on viendra à 14, dans le second rang IN; puis à 15; ensuite à la case marquée 16 du premier rang en dehors CD, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 24, qui est à côté de celle par laquelle on a commencé, en faisant en même sens qu'auparavant le tour du damier, sans sortir des deux premieres bandes en dehors, vers les extrémités du damier.

### R E M A R Q U E S .

Il nous a paru que le principe fondamental de la méthode de M. Moivre, étoit de remplir d'abord les cases des deux premieres bandes en dehors, en tournant en même sens autour du damier, comme on vient de le pratiquer, & comme on le pratiquera encore dans la suite, jusqu'à ce qu'on avertisse qu'il faut prendre un sens contraire en tournant autour du centre du damier.

Pour éviter la confusion dans le quarré suivant,

on n'a point marqué les vingt-quatre nombres marqués dans les cases du quarré précédent ; mais à leur place on a mis des barres, pour faire connoître que ces cases ont été parcourues par le cavalier.

3°. Quand on est parvenu à la case marquée 24, on est forcé d'aller à la case marquée 25, mais de cette case on ira à celle qui est marquée 26 de la première bande BD, pour faire un troisième tour en même sens qu'auparavant, & continuer à remplir les cases des deux premières bandes en dehors, suivant le principe fondamental : de la case marquée 26, on viendra à la case marquée 27 ; puis à celle qui est marquée 28, ensuite à 29, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 37, qui suit immédiatement dans la même diagonale la case marquée 1, qui est celle par où l'on a commencé ; ce qu'il est à propos d'observer sur le damier.

4°. De la case marquée 37, on ne peut aller qu'à la

|   | H  |    |    |    | I  |    |    |    |   |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| A | 34 | 49 | —  | —  | 36 | 39 | 24 | —  | B |
| E | —  | —  | 35 | 50 | —  | —  | 37 | 40 | G |
| P | 48 | 33 | —  | —  | 38 | 25 | —  | —  | Q |
| R | —  | —  | —  | —  | —  | Z  | 41 | 26 | S |
|   | 32 | 47 | —  | —  | —  | —  | —  | —  |   |
|   | —  | —  | —  | —  | —  | —  | 27 | 42 |   |
| K | 46 | 31 | —  | —  | 44 | 29 | —  | —  | L |
| C | —  | —  | 45 | 30 | —  | —  | 43 | 28 | D |
|   | M  |    |    |    | N  |    |    |    |   |

case marquée 38 dans la troisième bande PQ, ou à

celle qui est marquée Z dans la quatrième bande RS; mais on préférera la case qui est marquée 38 dans la bande PQ pour satisfaire au principe fondamental, qui est de faire parcourir d'abord au cavalier les deux premières bandes en dehors; car de la case Z on ne peut venir dans les deux premiers rangs BD, IN, pour recommencer un quatrième tour en même sens que les autres; mais en portant le cavalier à la case marquée 38, on peut retourner à la première bande BD, en passant par la case marquée 39 de la première bande AB, & de-là à la case 40 de la bande BD, où l'on voit qu'on reprend le même sens que dans les autres tours.

5°. Ainsi de 38 on passera à 39, & de 39 on viendra à la case qui est marquée 40 dans le premier rang en dehors BD, d'où l'on passera à la case marquée 41 dans la seconde bande IN, puisque les autres cases sont remplies: on continuera à faire le tour en même sens que les autres, suivant la marche du cavalier dans les deux premières bandes en dehors, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 50 dans la seconde bande EG.

### R E M A R Q U E.

On a dit qu'on doit recommencer les tours en même sens: cela doit s'entendre que le cavalier étant parvenu dans les cases de la diagonale, où il a d'abord été placé, ou dans une case voisine, il faut le placer aussi-tôt qu'on le peut dans l'une des cases de la première bande en dehors BD, & suivre les extrémités du damier dans les deux premières bandes en dehors, en allant de la bande BD en DC, de DC en CA, & de CA en AB.

268. RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

Pour éviter encore la confusion, on ne marquera pas les nombres marqués dans les quarrés précédens : on laissera les point du quarré précédent ; mais à la place des nombres qui y sont, on mettra des croix, pour faire connoître que toutes ces cases sont remplies, c'est-à-dire, couvertes de jettons, si on suit la seconde maniere d'exécuter le problème sur le damier, ou découvertes si on suit la premiere.

6°. Quand on sera parvenu à la case marquée 50, on ne peut plus recommencer le tour en même sens, puisque les cases des deux premieres bandes sont remplies ; on en commencera un autre en sens contraire, c'est à-dire, qu'on tournera autour du centre du damier, en s'éloignant de ce centre autant qu'on le pourra, & l'on ira vers la premiere bande en dehors AC, opposée à la bande BD.

|   | H |   |    |    | I  |    |   |   |   |
|---|---|---|----|----|----|----|---|---|---|
| A | + | + | —  | —  | +  | +  | — | — | B |
| E | — | — | +  | 50 | —  | —  | + | + | G |
| P | + | + | 64 | 57 | +  | +  | — | — | Q |
| R | — | — | 51 | 54 | 63 | 60 | + | + | S |
|   | + | + | 58 | 61 | 56 | 53 | — | — |   |
|   | — | — | 55 | 52 | 59 | 62 | + | + |   |
| K | + | + | —  | —  | +  | +  | — | — | L |
| C | — | — | +  | +  | —  | —  | + | + | D |
|   | M |   |    |    | N  |    |   |   |   |

Ainsi de la case 50, on placera le cavalier à la case 51 ; de 51 on ira à 52 ; puis à 53, & ainsi de

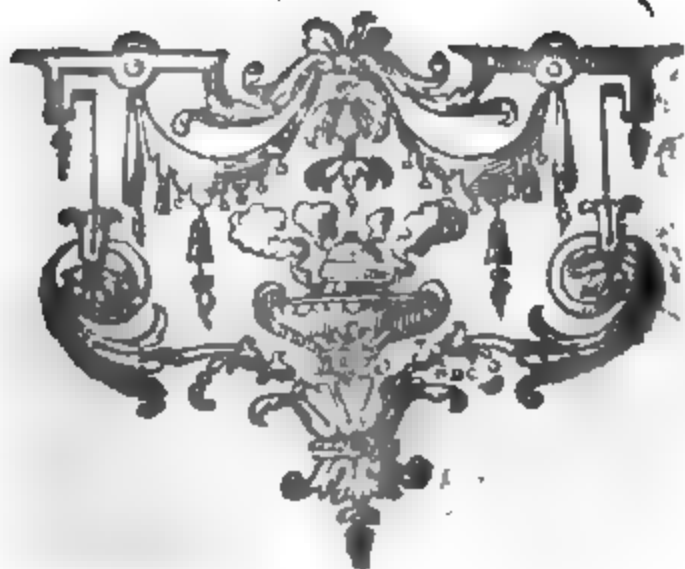
**PROBLÈMES D'ARITHÉTIQUE. 269**

suite, en tournant autour du centre du damier en sens contraire aux premiers, & en s'éloignant du centre autant qu'il sera possible.

**R E M A R Q U E.**

On voit que les trois derniers nombres 62, 63, 64, sont ici disposés d'une autre manière que dans la solution de M. Moivre : cette différente disposition vient de ce qu'on a jugé à propos de continuer depuis la case 50 à faire les tours en sens contraire, afin d'établir une même règle, & de pouvoir la pratiquer dans toute l'étendue de la solution du problème, quoiqu'avec quelque différence.

Cette méthode a paru facile à retenir, & à exécuter, quand on y fera quelque attention.





## P R O B L E M E S D E G E O M E T R I E.

**L**A géométrie n'est pas moins féconde que l'arithmétique ; mais elle n'est pas si aisée dans ses opérations, ni par conséquent si agréable dans la résolution de ses problèmes : c'est pourquoi je ne mettrai que ceux qui me paroîtront les plus faciles & les plus agréables.

### P R O B L E M E I.

*Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ses extrémités.*

I.

Pl. 1 ;  
Fig. 3.

**P**Our élever une perpendiculaire à la ligne donnée AB, par son extrémité A, mettez à l'extrémité A une des pointes du compas ouvert à volonté, & prenez sur cette ligne AD prolongée, s'il est nécessaire, trois parties égales AC, CD, DB, dont la dernière DB se termine ici par hasard à l'autre extrémité B de la ligne donnée AB. Décrivez de l'intervalle CB des deux dernières parties, & par leurs extrémités B, C, deux arcs de cercle, qui se coupent au point E : puis des deux points E, C, & avec la même ouverture du compas décrivez deux autres arcs de cercle, qui se coupent ici au point F. Par ce point F, & par



l'extrémité donnée A, vous tirerez la droite AF, Pl. 1;  
qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB. fig. 3.

II.

Si vous voulez tirer, par l'autre extrémité B de la même ligne donnée AB, une ligne qui lui soit en même tems égale & perpendiculaire, divisez la ligne AB en trois parties égales aux points C, \* D. Puis ayant trouvé le point F, comme il vient d'être enseigné, décrivez de l'extrémité donnée B, & de l'intervalle AF, l'arc de cercle GHI, & portez sur cet arc la même ouverture du compas deux fois de G en H, & de H en I. Décrivez avec la même ouverture du compas & des deux points H, I, deux arcs de cercle qui se coupent ici au point K. Enfin menez la droite BK, elle sera égale & perpendiculaire à la ligne proposée AB.

\* Voyez le problème III suivant.

PROBLEME II.

*Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

I.

**P**our mener par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, prenez à volonté sur cette ligne AB, deux points proche des deux extrémités A, B, comme D, E: puis du point donné C & de l'intervalle DE, décrivez un arc de cercle vers F; ensuite du point E & de l'intervalle CD, décrivez un autre arc de cercle, qui rencontre ici le premier au point F. Par ce point F, & par le point donné C, vous menez la droite CF, qui sera parallele à la proposée AB. Fig. 41

## II.

Si vous voulez que la ligne parallèle soit égale à la ligne AB, au lieu de vous servir des deux points D, E, servez-vous des deux extrémités A, B. Du point donné C, & de l'intervalle de la ligne donnée AB, décrivez un arc de cercle vers G: puis de l'extrémité B, & de l'intervalle AC, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en G. Par ce point G, où ces deux arcs se coupent, & par le point donné C, menez la droite CG, elle sera égale & parallèle à la proposée AB.

## PROBLEME III.

*Diviser d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.*

Pl. I,  
F. 4 & 5.

SI vous voulez diviser la ligne donnée AB en quatre parties égales, prolongez-la autant qu'il est nécessaire, comme ici jusqu'en E, en sorte que AB, BC, CD, DE, soient quatre parties égales chacune à AB. Faites sur ces parties les quatre triangles équilatéraux ABF, BCG, CDH, DEI; ce qui peut se faire avec la même ouverture de compas. Enfin menez les droites AG, AH, AI: alors la ligne HM représentera une des quatre parties de la ligne AB, la ligne DM: en représentera par conséquent trois, & la ligne FK ou BK en représentera deux.

Mais la seule ligne AI suffit: car elle retranche la ligne B<sub>1</sub>, égale à la quatrième partie de la ligne AB, la ligne C<sub>2</sub>, égale à la moitié de la même ligne AB, & la ligne D<sub>3</sub>, égale aux trois quarts de la même ligne AB.

La

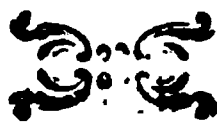
La ligne AH sert pour diviser la ligne proposée AB en trois parties égales; car la ligne GL en représente une, & la ligne CL en représente par conséquent deux. Mais la même ligne AI suffit aussi pour la division de la ligne donnée AB en trois parties égales, parce que la ligne BN en représente une, & la ligne CO en représente deux. D'où il suit que la ligne HO en représente aussi une.

#### PROBLEME IV.

*Faire un angle qui soit la moitié, ou le double d'un angle donné.*

**P**Remierement, pour faire un angle ADG, qui soit la moitié de l'angle donné ABC; de son sommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté sur l'un des côtés AB prolongé à discrétion, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point D & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté BC de l'angle donné, menez la ligne DG: l'angle ADG sera la moitié de l'angle donné ABC. Pl. 3,  
fig. 6.

Secondement, pour faire un angle ABC, qui soit double de l'angle donné ADG; d'un point B comme centre pris à volonté sur l'un des côtés AD, & de l'intervalle BD distance de B, jusques au sommet D de l'angle donné, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point B & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté de l'angle donné, menez la ligne BC: l'angle ABC sera double de l'angle donné ADG.



## PROBLEME V.

*Faire un angle qui soit le tiers , ou le triple d'un angle donné.*

Pl. 3,  
fig. 7.

**P**Remierement, pour faire un angle égal à la troisieme partie de l'angle donné ABC, de son sommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté, décrivez le demi-cercle DEF; puis appliquez une regle bien droite au point E; en sorte que sa partie GI, terminée par la circonference du demi-cercle DEF, & par la ligne AD prolongée, soit égale au demi-diametre BD, ou BE. Après cela menez la droite GE, qui fera au point G, l'angle AGH égal à la troisieme partie de l'angle ABC. L'arc ID sera aussi égal à la troisieme partie de l'arc EF, qui mesure l'angle donné ABC.

Secondement, pour faire un angle égal au triple de l'angle donné AGH; ayant pris à discrétion sur la ligne GH, le point I, portez la longueur IG sur la ligne AG, de I en B, pour décrire du point B, & de l'intervalle IB, le demi-cercle DEF, qui passera par le point I, & donnera sur la ligne GH le point E. Par ce point E & par le point B, vous tirerez la droite BE, qui fera l'angle ABC, triple du donné AGH.

## PROBLEME VI.

*Trouver à deux lignes données une troisieme , & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.*

Fig.

**P**Our trouver aux deux lignes données AB, AC, une troisieme proportionnelle, décrivez

de l'extrémité B de la première AB, par l'autre extrémité A, l'arc de cercle AF, sur lequel ayant mis la longueur de la seconde AC, de A en F, portez la même longueur sur la ligne AC, prolongée autant qu'il sera besoin de F en D, & la ligne AD sera troisième proportionnelle aux deux lignes données AB, AC.

De même pour trouver aux trois lignes AB, AC, AD, une quatrième proportionnelle, ou ce qui est la même chose, aux deux AC, AD, une troisième proportionnelle, décrivez de l'extrémité C de la première AC, par l'autre extrémité A, l'arc de cercle AG, sur lequel ayant mis la longueur de l'autre ligne AD, de A en G, portez la même longueur AD sur la ligne AD prolongée, de G en E, & la ligne AE sera celle qu'on cherche: & ainsi de suite.

## PROBLEME VII.

*Décrire sur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les aires soient égales.*

**S**I la ligne donnée est AB, tirez à discrétion la Pl. 3,  
parallèle CD, sur laquelle ayant pris à volonté fig. 4.  
autant de points différens que vous voudrez de  
triangles égaux, comme E, F, G, pour trois  
triangles, menez de ces trois points E, F, G,  
aux extrémités A, B, de la ligne donnée AB,  
des lignes droites, & vous aurez les trois trian-  
gles égaux AEB, AFB, AGB, sur la même  
base AB.

## PROBLEME VIII.

*Décrire sur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les contours soient égaux.*

Pl. 3 ,  
fig. 10.

**S**I la base donnée est AB, divisez-la en deux également au point C, & prolongez-la de part & d'autre à volonté en D, & en E, en sorte que les deux lignes CD, CE, soient égales entre elles. Toute la ligne DE sera prise pour la somme des deux côtés de chaque triangle, qu'on décrira sur la base donnée AB en cette sorte.

Décrivez du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AD, un arc de cercle vers F. Puis ayant porté cette ouverture sur la ligne DE, de D en I, décrivez du point B, & de l'intervalle IE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F. Ce sera le sommet du premier triangle ABF.

Décrivez pareillement du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AF, un arc de cercle vers G. Puis ayant porté cette ouverture sur la ligne DE, de D en K, décrivez du point B, & de l'intervalle KE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point G. Ce sera le sommet du second triangle AGB, dont le contour sera égal au contour du premier AFB.

Si vous voulez un troisieme triangle, décrivez encore du point A un arc de cercle vers H, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AG. Puis ayant porté, comme auparavant, cette ouverture sur la ligne DE, de D en L, décrivez du point B, & de l'intervalle LE un autre arc de

cercle ; qui coupe ici le premier au point H. Ce sera le sommet du troisieme triangle AHB, dont le contour sera le même que celui des deux précédens. Ainsi des autres.

Vous remarquerez que les sommes F, G, H, de tous ces triangles, se trouvent sur la circonférence d'une ellipse, dont le grand axe est DE, & les deux foyers sont A, B.

### PROBLEME IX.

*Décrire deux triangles isosceles différens, de même aire & de même contour.*

**A**Yant préparé un échelle IK, divisée en autant de parties égales qu'il conviendra, prenez sur la base AB, les deux segmens GA, GB, chacun de 12 parties prises sur l'échelle ; élevez au point G sur la même base AB la perpendiculaire GC de 35 des mêmes parties ; tirez les deux lignes égales AC, BC, & vous aurez le premier triangle isoscele ACB, dont chacun des côtés égaux AC, BC, se trouvera de 37 parties, comme on le connoitra en ajoutant le quarré 144 du segment AG, avec le quarré 1225 de la perpendiculaire CG, & en prenant la racine quarrée de la somme 1369.

Pl. 3,  
fig. 11.

Pour avoir un triangle de même aire & de même contour que le précédent, prenez sur la base DE, les deux segmens HD, HE, chacun de 20 parties, & ayant élevé au point H sur la base DE la perpendiculaire HF de 21 parties, tirez les lignes égales EF, DF, dont chacune se trouvera de 29 parties, comme on le connoitra en ajoutant le quarré 400 du segment DH, avec le quarré 441

de la perpendiculaire HF, & en prenant la racine quarrée de la somme 841.

Ainsi vous aurez le triangle isoscele DEF, dont le contour 98 est égal au contour, c'est-à-dire, à la somme des trois côtés du premier triangle isoscele ABC, & dont l'aire, ou le contenu 420 est égal au contenu du premier triangle isoscele ABC, comme on le connoît, en multipliant DH par FH, ou 20 par 21 : car le produit 420 qui en vient pour l'aire du triangle DEF, est le même que celui qui vient en multipliant AG par CG, ou 12 par 35, pour l'aire du triangle ABC.

On peut décrire autant de couples qu'on voudra de triangles isosceles de même aire & de même contour, en trouvant en nombres ces couples; ce qui se peut faire en cherchant les deux nombres générateurs des moitiés ACG, DFH, qui sont deux triangles rectangles égaux. Ces nombres générateurs connus serviront à en trouver d'autres, par le moyen desquels on trouvera deux triangles rectangles, comme il a été enseigné au *problème IX d'arithmétique*, pag. 59. Voici la méthode de trouver les nombres générateurs des deux triangles rectangles ACG, DFH, qui est générale pour tout autre triangle rectangle, dont on connoît les trois côtés, ou au moins deux.

Pour trouver les nombres générateurs du triangle ACG, ajoutez l'hypoténuse 37 à l'un des côtés 12, vous aurez le quarré 49, dont la racine est 7, que vous garderez. Ajoutez ensuite l'hypoténuse 37 à l'autre côté 35, pour avoir une somme 72, dont la moitié 36 a pour racine quarrée 6, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 6 à 7, & vous aurez 1 pour l'autre nombre générateur du triangle ACG.



Il faut suivre la même opération pour trouver les nombres générateurs du triangle DFH : ajoutez l'hypoténuse 29 au côté 20, vous aurez encore le carré 49, dont la racine est 7, que vous garderez ; ajoutant encore la même hypoténuse 29 à l'autre côté 21, vous aurez 50, dont la moitié 25 a pour racine carrée 5, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 5 à 7, & vous aurez 2 pour l'autre nombre générateur du triangle DFH.

Ainsi les nombres générateurs du triangle ACG, sont 6, 1 : & les nombres générateurs du triangle DFH sont 5, 2.

A présent pour avoir autant qu'on voudra de couples de triangle de même aire & de même contour, il faut multiplier les nombres générateurs 6, 1, 5, 2, par un même nombre tel qu'il plaira : si on les multiplie par 2, on aura 12, 2, & 10, 4 pour nombres générateurs de deux autres triangles rectangles de même aire : car multipliant 12 par 2, on aura 24, dont le double 48 sera AG, un des côtés du nouveau triangle ; puis ajoutant 144, 4 carrés de 12, 2, on aura la somme 148 pour l'hypoténuse AG. Enfin ôtant 4, carré de 2, de 144, carré de 12, on aura 140 pour l'autre côté CG : ainsi le triangle rectangle ACG, dont les côtés étoient 37, 35, 12, se trouvera transformé en un autre, dont les côtés seront 148, 140, 48. Pour avoir un triangle isoscele, il ne faut que prolonger la base AG jusqu'en B, faire GB égale à AG, qui est ici de 48 parties, & tirer la ligne CB, qui sera de 148 parties comme AC. Ce triangle isoscele ainsi supposé, aura 392 parties de contour & 6720 de superficie.

De même pour avoir l'autre nouveau triangle,

dont les nombres générateurs sont 10, 4, on multipliera 10 par 4, & l'on aura 40, dont le double 80 sera le côté DH; ensuite ajoutant 100 & 16, quarrés de 10, 4, on aura 116 pour l'hypoténuse DF; & ôtant 16, quarré de 4, de 100, quarré de 10, on aura 84 pour l'autre côté FH: ainsi le triangle rectangle DFH, dont les côtés étoient 29, 21, 20, se trouvera transformé en un autre, dont les côtés seront 116, 84, 80. Pour achever le triangle isoscele, il ne faut que prolonger DH jusqu'en E, en faisant DE égale à DH; qui est ici de 80 parties, & tirer la ligne FE, qui sera de 116 parties, comme DF. Ce nouveau triangle isoscele aura 392 parties de contour, & 6720 de superficie: par conséquent il sera de même aire & de même contour que l'autre.

On peut s'exercer, en multipliant les nombres générateurs 6, 1: 5, 2, par un tel autre nombre qu'on voudra.

### P R O B L E M E X.

*Décrire trois différens triangles rectangles, dont les aires soient égales.*

Pl. 4,  
fig. 12.

**A**yant préparé une échelle divisée en parties égales, prenez la base AB de 42 parties, & la hauteur ou perpendiculaire AC de 40; l'hypoténuse BC du premier triangle rectangle ABC se trouvera de 58 parties, comme on le connoitra en ajoutant le quarré 1764 de la base AB, au quarré 1600 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 3364.

Prenez ensuite la base DE du second triangle rectangle DEF de 70 parties, & la hauteur DF de

24; l'hypoténuse EF se trouvera de 74 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le carré 4900 de la base DE, & le carré 576 de la hauteur DF, & en prenant la racine carrée de la somme 5476. L'aire de ce second triangle rectangle DEF sera égale à celle du premier ABC, chacune étant 840, comme on le connoît en multipliant la base par la hauteur, & en prenant la moitié du produit.

Enfin prenez la base FG du troisieme triangle rectangle FGH, de 112 parties, & la hauteur FH de 15; l'hypoténuse BC se trouvera de 113 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le carré 12544 de la base FG, le carré 225 de la hauteur FH, & en prenant la racine carrée de la somme 12769. L'aire de ce troisieme triangle rectangle FGH sera aussi 840.

Ces trois triangles rectangles ont été trouvés en nombres entiers, par ce canon que nous avons tiré de l'algèbre, qui nous apprend que pour trouver en nombres entiers, trois triangles rectangles égaux, on doit auparavant trouver trois nombres qui serviront de nombres générateurs, en cette sorte.

*Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques à la somme de leurs carrés, on aura le premier nombre. La différence de leurs carrés sera le second: & la somme de leur produit & du carré du plus petit, sera le troisieme nombre générateur.*

*Si de ces trois nombres ainsi trouvés, on forme trois triangles rectangles; sçavoir, l'un des deux premiers, l'autre des deux extrêmes, & le troisieme du premier & de la somme des deux autres, ces trois triangles rectangles seront égaux entr'eux.*

\* Voyez le probl. IX<sup>e</sup> d'arithm. p. 50.

On peut trouver en nombres rompus autant d'autres triangles rectangles qu'on voudra, dont les aires seront égales entr'elles & à l'un des trois précédens, en trouvant par le moyen de ce triangle rectangle un autre triangle rectangle égal, en cette sorte.

*Formez de l'hypoténuse du triangle rectangle proposé, & du quadruple de son aire, un autre triangle rectangle, que vous diviserez par le double du produit, qui viendra en multipliant l'hypoténuse du triangle rectangle proposé par la différence des quarrés des deux autres côtés du meme triangle rectangle, & vous aurez un triangle rectangle égal au proposé.*

## PROBLEME XI.

*Décrire trois triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisieme soit obtusangle.*

Pl. 4,  
fig. 13.

**A**Yant préparé, comme auparavant, une échelle divisée en parties égales, qui peuvent représenter des pieds, des toises, & tout ce qu'il vous plaira, prenez la base AB du triangle rectangle ABC de 24 parties, & la hauteur AC de 7; l'hypoténuse BC se trouvera de 25 parties, comme on le connoitra en ajoutant ensemble le quarré 576 de la base AB, & le quarré 49 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 625.

Prenez ensuite sur la base DE du triangle acutangle DEF, le segment KD de 5 parties, & le segment KE de 9; élevez du point K sur la base DE, la perpendiculaire KF de 12 parties: alors

le côté DF se trouvera de 13 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 25 du segment DK, & le quarré 144 de la hauteur FK, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'autre côté se trouvera de 15 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 81 du segment KE, & le quarré 144 de la perpendiculaire KF, & en prenant la racine quarrée de la somme 225.

Enfin prenez sur la base GH du triangle obtusangle GHI, le segment LG de 6 parties, & le segment LH de 15; élevez du point L, sur la base GH, la perpendiculaire LI de 8 parties, alors le côté GI se trouvera de 10 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 36 du segment GL, & le quarré 64 de la hauteur IL, & en prenant la racine quarrée de la somme 100. Le côté HI se trouvera de 17 parties, comme on le connoîtra en ajoutant au quarré 225 du segment LH, le quarré 64 de la perpendiculaire LI, & en prenant la racine quarrée de la somme 289.

On connoît que le triangle ABC est rectangle en A, parce que la somme 625 des quarrés 49, 576, des deux côtés AC, AB, est égale au quarré du troisieme côté BC: que le triangle DEF, est acutangle, parce que la somme des quarrés de deux côtés quelconques est plus grande que le quarré du troisieme côté: enfin que le triangle GHI est obtusangle, & que l'angle I est obtus, parce que le quarré 441 de son côté opposé GH, qui est de 21 parties, est plus grand que la somme 389 des quarrés 100, 289, des deux autres côtés GI, HI.

Enfin on connoît que ces trois triangles ABC, DEF, GHI, sont égaux, c'est-à-dire, que leurs

aires sont égales, parce qu'en multipliant la base AB par la hauteur AC, il vient le même produit qu'en multipliant la base DE par la hauteur FK, ou la base GH par la hauteur LI, sçavoir 168, qui est le double de l'aire de chaque triangle, laquelle par conséquent sera 84. La perpendiculaire FK, & les trois côtés du triangle acutangle DEF, sont dans une proportion continue arithmétique.

## PROBLEME XII.

*Trouver une ligne droite égale à son arc de cercle donné.*

Pl. 4,  
fig. 14.  
\* Voyez  
le pro-  
bl. III,  
p. 202.

**P**OUR trouver une ligne droite égale à l'arc de cercle BCD, dont le centre est A, & le rayon ou demi-diamètre est AB, ou AD, divisez\* cet arc en deux également au point C. Tirez les cordes BC, CD, BD. Prolongez la corde BD en E, en sorte que la ligne BE soit double de l'une des deux cordes égales BC, CD, c'est-à-dire, égale à la somme de ces deux cordes. Prolongez encore la ligne BE en F, en sorte que la ligne EF soit égale à la troisième partie de la ligne DE,\* & la ligne droite BF sera à peu près égale à la courbe BCD. J'ai dit à peu près, parce que la ligne BF est tant soit peu moindre que l'arc BCD; mais la différence est si petite, lorsque l'arc BCD ne passe pas 30 degrés, qu'il ne s'en faut pas une partie de cent mille qu'on peut donner au rayon AB, ou AD.

## REMARQUE.

Si l'arc BCD est précisément de 30 degrés, ou la douzième partie de la circonférence de tout le

cerle, & que le rayon AB, ou AC soit de 50000 parties, on connoîtra par la trigonométrie que chacune des deux cordes BC, CD, est de 13053 parties. Ainsi leur somme, ou la ligne BE sera de 26106 parties, de laquelle ôtant la corde BD, qui se trouvera de 25882 parties, il en restera 224 pour la ligne DE, dont la troisième partie est 74 pour la ligne EF. Cette troisième partie étant ajoutée à la ligne BE, ou à 26106, la somme sera 26180 pour la ligne BF, ou pour l'arc BCD. Enfin multipliant cet arc, ou 26180 par 12, on aura 314160 pour la circonférence du cercle. Ainsi nous sçavons que quand le diamètre d'un cercle est de 100000 parties, la circonférence est d'environ 314160 semblables parties, & par conséquent que le diamètre d'un cercle est à la circonférence à peu près comme 100000 est à 314160, ou comme 10000 à 31416.

Ce rapport sert à trouver la circonférence d'un cercle, dont on connoît le diamètre. Il faut multiplier ce diamètre par 31416, & diviser le produit par 10000. Cette division se fera en retranchant de ce produit quatre figures à la droite : les figures qui resteront à la gauche, feront connoître la circonférence du cercle, & les figures retranchées seront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur sera 10000.

Pour connoître la circonférence d'un bassin rond d'un jet d'eau, dont le diamètre est, par exemple, de 64 pieds, on multipliera 64 par 31416, on retranchera quatre figures à la droite du produit 2010624, & l'on aura 201 pieds  $\frac{614}{10000}$ , pour la circonférence qu'on cherche.

Il faudra faire tout le contraire, si on veut connoître le diamètre d'un cercle, ou d'une boule

par sa circonférence connue, c'est-à-dire, qu'il faudra multiplier cette circonférence par 100000; ce qui se fera en lui ajoutant vers la droite quatre zeros, & l'on divisera le produit par 31416.

Ainsi pour connoître le diametre d'une tour ronde, dont on sçait que le contour ou la circonférence mesurée en dehors par le moyen d'une longue corde, est de 154 pieds, on ajoutera quatre zeros à la droite de ce nombre 154, on divisera 1540000 par 31416, & l'on aura 49 pieds  $\frac{616}{31416}$  pour le diametre qu'on cherche.

### PROBLEME XIII.

*Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.*

#### I.

Pl. 4,  
fig. 15.

**P**Remierement, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle, partagez la plus grande AB en deux parties égales au point E. De ce point E, comme centre & de l'intervalle AE, ou EB, décrivez le demi-cercle ADB; portez ensuite de A en C la plus petite ligne AC: élevez au point C la perpendiculaire CD, & menez la droite AD, qui sera moyenne proportionnelle entre les deux AB, AC.

#### II.

Fig. 16.

En second lieu, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, deux moyennes continûment proportionnelles, faites de ces deux lignes données



AB, AC, le parallelogramme rectangle ABCD; Pl. 4, puis décrivez de son centre E, l'arc de cercle fig. 16. GHF de telle grandeur que la droite FG, qui sera tirée par les deux points F, G, où il coupe les deux lignes données AC, AB, prolongées, passe par le sommet D de l'angle droit du parallelogramme. Alors les deux lignes CF, BG, seront les deux moyennes proportionnelles, qu'on cherche. De sorte que les quatre lignes AB, CF, BG, AC, seront continuellement proportionnelles.

### III.

Enfin, pour trouver entre deux lignes données Fig. 15: AB, AC, trois moyennes continuellement proportionnelles, après avoir trouvé entre ces deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle AD, comme il a été enseigné, \* cherchez de la même façon entre cette moyenne AD, & la premiere AC, une autre moyenne proportionnelle AF, & entre la même moyenne AD & la derniere AB, une autre moyenne proportionnelle AG. Les trois lignes AF, AD, AG, seront les moyennes proportionnelles qu'on cherche: de sorte que les cinq lignes AC, AF, AD, AG, AB, seront dans une proportion continue. \* Art. I.

### R E M A R Q U E S.

Si les deux lignes AB, AC, sont données en nombres, comme si AB étoit de 32 pieds, & AC, de 2, on pourra exprimer en nombres les trois moyennes AF, AD, AG, en multipliant ensemble les deux nombres 32, & 2, des deux lignes données AB, AC, & en prenant la racine quarrée du produit 64, qui donnera 8 pour la moyenne

AD, laquelle étant multipliée séparément par la première AC, & par la dernière AB, les racines quarrées des deux produits 16, 256, donneront 4 pour AF, & 16 pour AG.

Fig. 16. Mais pour trouver en nombres seulement deux moyennes proportionnelles entre les deux proposées AB, AC, telles que sont les deux CF, BG, en supposant que la plus petite AB soit de deux pieds, & la plus grande AC de 16; multipliez le quarré 4 de la première AB par la dernière AC, & prenez la racine cubique du produit 64, qui donnera 4 pour CF, première des deux moyennes proportionnelles cherchées. De même multipliez le quarré 256 de la dernière AC, par la première AB, & prenez la racine cubique du produit 512, qui donnera 8 pour l'autre moyenne proportionnelle BG.

#### PROBLEME XIV.

*Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi la circonférence du cercle donné.*

Pl. 4,  
fig. 17.

Ayant divisé le cercle donné ABCD, dont le centre est E, en quatre parties égales par les deux diametres perpendiculaires AC, BD, prenez sur le diametre BD, la ligne DF, égale à la ligne CD, qui est la soutendante ou la corde du quart de cercle. La ligne EF sera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte la longueur de cette ligne EF sur les extrémités des diametres perpendiculaires AC, BD, en AK, BG, CH, DI, & que des centres K, G, H, I, on décrive par les points

points A, B, C, D, quatre circonférences de cercles, elles se toucheront mutuellement, & elles toucheront aussi celle du cercle donné ABCD.

R E M A R Q U E.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme I, K, par la ligne droite IK, cette ligne droite IK sera parallèle à sa corde correspondante DA, & passera par le point d'attouchement O: elle fera aussi en I un angle demi-droit, ou de 45 degrés, avec le diamètre BD; d'où il suit que l'arc LO sera de 45 degrés, aussi bien que l'arc MO, & que tout l'arc LM est un quart de cercle.

Si on joint la droite CF, l'angle ECF sera de 22 degrés 30 minutes; d'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du problème.

PROBLEME XV.

*Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles qui touchent la circonférence & le diamètre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux.*

**E** Levez du centre D du demi-cercle donné ABC, sur son diamètre AC, la perpendiculaire DB, & divisez-la en deux également au point E. Ce point sera le centre du cercle BDK, le plus grand des trois qu'on cherche.

Pour décrire les deux autres cercles, qui sont égaux entre eux, divisez le demi-diamètre DE en deux également au point H; puis de l'intervalle BH, & des deux points E, D, comme centres,

décrivez de part & d'autre deux arcs de cercle ; qui se coupent ici en F & G. Ces deux points F, G, feront les centres des deux cercles égaux, qu'il ne sera pas difficile de décrire, parce que le rayon de chacun est égal à la ligne DH, ou à la quatrième partie du diamètre BD, ou bien, ce qui est la même chose, à la huitième partie du grand diamètre AC.

### R E M A R Q U E.

Il est évident que le demi-cercle ABC est double du cercle BDK ; le diamètre AC étant double du diamètre BD, & que le demi-cercle BID, est aussi double du cercle LOI, le rayon DE étant double du rayon FI, ou FL. D'où il est aisé de conclure que le triangle mixtiligne ABID est égal au demi-cercle BDI, & par conséquent que le demi-cercle ABC se trouve divisé en quatre parties égales par le diamètre BD, & par la circonférence BDK.

### P R O B L E M E X V I.

*Décrire quatre cercles proportionnels, en sorte que leur somme soit égale à un cercle donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée.*

Plan. 5.  
fig. 19. **S**Oit ABCD le cercle donné, dont le point O est le centre, & AC un diamètre. Soit AE la ligne donnée qui doit être plus grande que le rayon AO, & moindre que le diamètre AC, si l'on veut que les quatre cercles qu'on cherche, soient inégaux. Les diamètres de ces quatre cercles se détermineront en cette sorte.

Ayant tiré à volonté dans le cercle donné ABCD la ligne FG, parallèle au diamètre AC, & ayant retranché de la ligne donnée AE la partie EH, égale à la moitié de la ligne FG, élevez à l'extrémité A du diamètre AC, la ligne AI, faites la égale à AH, & perpendiculaire \* au diamètre AC, & \* *Pro I;* menez par le point I la ligne IB parallèle au dia- *P. 272.* mètre AC : cette parallèle IB rencontre ici la circonférence du cercle donné au point B. Par ce point B, tirez la ligne BD, perpendiculaire à \* la ligne FG. Les quatre lignes KF, KB, KG, KD, seront les diamètres des quatre cercles qu'on cherche.

R E M A R Q U E.

Il arrivera que les deux plus petits cercles KF, KB, seront égaux entr'eux, aussi bien que les deux plus grands KG, KD, lorsque la ligne FG sera égale à la ligne donnée AE. Ainsi quand on voudra que tous ces quatre cercles soient inégaux, on doit tirer la ligne FG plus grande ou plus petite que la ligne donnée AE : alors le cercle KF sera le plus petit de tous, & le cercle KD sera le plus grand.

P R O B L E M E X V I I.

*Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc dont le sinus soit égal à la corde du complément de cet arc.*

P Our déterminer sur la circonférence du quatr *Plan. 6.* de cercle ABC, dont le centre est A, l'arc *fig. 101* CD, dont le sinus ED soit égal à la corde BD du complément de cet arc, élevez à l'extrémité B

du rayon  $AB$ , la perpendiculaire  $BG$ , égale à la corde  $BC$  du quart de cercle, & tirez du centre  $A$  par le point  $G$ , la droite  $AG$ : puis ayant pris sur le rayon  $AB$ , la partie  $AF$  égale à la partie  $GH$ , élevez au point  $F$  sur  $AB$ , la perpendiculaire  $FD$ , qui déterminera l'arc  $CD$  qu'on cherche.

### R E M A R Q U E.

La sécante  $AG$  de l'arc  $BH$  est égale à la tangente d'un arc de 60 degrés, c'est-à-dire que le rayon  $AH$  étant de 100000 parties, la ligne  $AG$  en comprend 173205, de laquelle ôtant  $AH$ , ou 100000, le reste 73205 est la partie  $GH$ , ou  $AF$ , c'est-à-dire, le sinus  $ED$  de l'arc  $CD$ , qui se trouvera de  $47^{\circ}$ ,  $3'$ ,  $31''$ , & par conséquent son complément  $BD$  de  $42^{\circ}$ ,  $56'$ ,  $29''$ . Ainsi nous savons que le sinus d'un arc de  $47^{\circ}$ ,  $3'$ ,  $31''$ , est égal à la corde d'un arc de  $42^{\circ}$ ,  $56'$ ,  $29''$ , qui est son complément.

### P R O B L E M E X V I I I

*Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en progression géométrique.*

Plan. 6. fig. 21. **A**Yant décrit à volonté le demi-cercle  $ABC$ , dont le centre est  $D$ , & dont le diamètre  $AC$  sera pris pour l'hypoténuse du triangle rectangle qu'on cherche, tirez par l'extrémité  $C$  de ce diamètre  $AC$ , la ligne  $CE$ , égale & perpendiculaire au même diamètre  $AC$ . Joignez la droite  $DE$  qui se trouve ici coupée par la circonférence du demi-cercle  $ABC$  au point  $F$ . Portez la longueur de la partie  $EF$  sur la circonférence  $ABC$ ,

de A en B, & joignez les droites AB, BC, qui Plan.6.  
feront au point B un angle droit. Le triangle rec- fig. 21.  
tangle ABC sera celui qu'on cherche ; de sorte qu'il  
y aura même raison du côté AB, au côté BC, que  
du même côté BC, à l'hypoténuse AC.

R E M A R Q U E.

Si de l'angle droit B, on mène la ligne BG perpendiculaire à l'hypoténuse AC, le plus grand segment CG sera égal au plus petit côté opposé AB, ou à la partie EF. De-là on peut tirer cette autre construction pour la résolution du problème. Prenez sur le diamètre AC, la partie CG égale à la partie EF, & abaissant du point O la perpendiculaire GB, elle coupera la circonférence ABC au point B ; d'où l'on menera les lignes AB, BC, qui formeront le triangle rectangle cherché.

On aura une troisième construction, si l'on considère que l'hypoténuse AC se trouve coupée au point G par la perpendiculaire BG, en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'hypoténuse AC est à son plus grand segment CG, comme le même plus grand segment CG est au plus petit AG.

Si vous voulez une quatrième construction, abaissez de l'extrémité A, la ligne AG perpendiculaire au diamètre AC, & égale à la troisième partie du même diamètre AC, & tirez par le point G au diamètre AC, la parallèle GH : cette ligne GH sera égale à la troisième partie du petit segment AG.



## PROBLÈME XIX.

*Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.*

Plan. 6,  
fig. 22.

**A**Yant divisé le cercle donné ABCD en quatre parties égales par les deux diamètres AC, BD, qui se coupent à angle droit au centre E, prenez sur le diamètre AC prolongé la ligne AF égale à la ligne AB, ou à la corde du quart de cercle. La ligne EF donnera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte cette longueur EF sur chacun des deux diamètres prolongés AC, BD, depuis la circonférence du cercle donné ABCD aux points G, H, I, K, & que de ces points, G, H, I, K, comme centres, on décrive, par les points A, B, C, D, autant de cercles égaux, ces quatre cercles se toucheront mutuellement, & toucheront aussi la circonférence du cercle donné ABCD.

## REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme GH, par la droite GH, cette ligne GH sera parallèle à la corde correspondante AB, & elle passera par le point d'atouchement O. Elle fera par conséquent aux points G, H, des angles demi-droits, ou de 45 degrés; ce qui fait que chacun des arcs AG, BO, sera aussi de 45 degrés. D'où il est aisé de conclure, qu'en prolongeant de part & d'autre la corde AB en M & en N, chacun des arcs AM, BN, sera un quart de cercle.



## PROBLEME XX.

*Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en progression arithmétique.*

**M** Arquez sur la ligne indéfinie AB, cinq parties égales de telle grandeur qu'il vous plaira, de A en B, & prenant la ligne déterminée AB pour l'hypoténuse du triangle rectangle qu'on cherche, décrivez de son extrémité A, à l'ouverture de trois parties, un arc de cercle, & de l'autre extrémité B, à l'ouverture de quatre parties un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point C, d'où vous tirerez aux deux extrémités A, B, de l'hypoténuse AB, les droites AC, BC. Le triangle ABC, sera rectangle en C, & ses trois côtés AB, BC, AC, seront en proportion arithmétique, c'est-à-dire, qu'ils se surpasseront également, puisque le côté AB est de 5 parties, le côté BC de 4, & le côté AC de 3. Plan. 7.  
fig. 23.

## REMARQUE.

Ce triangle rectangle est seul de son espece, dont les trois côtés soient arithmétiquement proportionnels. Ils sont tels, que la somme de leurs cubes en nombres est un cube parfait; car AB étant 5, son cube est 125, BC étant 4, son cube est 64, & AC étant 3, son cube est 27, & la somme 216 de ces trois cubes 125, 64, 27, a pour racine cubique 6, qui dans ce triangle rectangle se rencontre égale à son aire.

Si on double tous les côtés du triangle ABC, Fig. 24. en sorte que le côté AB soit de 10 parties, le côté

BC de 8 , & le côté AC de 6 , on aura un autre triangle rectangle semblable au précédent. Ses trois côtés seront encore en proportion arithmétique , & la somme de leurs cubes sera aussi un cube parfait ; sçavoir , 1728 , dont le côté , ou la racine cubique est 12. De plus , l'aire & le contour de ce second triangle rectangle ABC , seront égaux entre eux , chacun étant 24. Voyez le problème XXIII.

### P R O B L E M E ' X X I .

*Décrire autour d'un triangle équilatéral donné six cercles égaux , qui se touchent mutuellement , dont trois touchent les trois côtés du triangle , & les trois autres soient portés par ses sommets.*

Plan. 7,  
fig. 25.

**Q**ue le triangle équilatéral donné soit ABC , & que son centre soit D. Tirez de ce centre D , par les trois angles A , B , C , & par les milieux E , F , G , des trois côtés , autant de lignes droites , sur lesquelles on doit déterminer les centres K , L , M , N , O , P , des six cercles qu'on cherche , & qu'on trouvera en cette sorte.

Ayant pris sur le côté AB la partie EH , égale à la moitié de la perpendiculaire DE , & ayant tiré la droite DH , prolongez cette ligne DH en I , en sorte que la partie HI soit égale à la partie HE. Toute la ligne DI donnera la longueur du rayon de chacun des six cercles égaux qu'on veut décrire , dont les centres se trouveront en portant cette longueur DI de E en K , de B en L , &c.

### R E M A R Q U E ,

Si l'on joint les deux centres P , L , par la droite

PL, cette ligne PL sera parallele au côté AB, & divisera par conséquent à angles droits & en deux également au point Q, le rayon EK. D'où il suit que si l'on joint la droite EL, & la droite KL, qui passera par le point d'atouchement K, le triangle ELK sera isoscèle, chacun des deux côtés égaux EL, KL, étant double de la base EK : l'arc ER sera de  $75^{\circ}, 31', 20''$ , & l'arc BR de  $44^{\circ}, 28' 40''$ ; ce qui fait que ces deux arcs font ensemble précisément 120 degrés, sçavoir, autant que l'angle PDL.

## PROBLEME XXII.

*Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.*

Que les demi-cercles ABC, ADE, AFG, AHI, AKL, qui ont leurs centres sur la ligne AL, perpendiculaire à la ligne AM, se touchent au sommet de l'angle droit MAL, & qu'il faille trouver les points où tous ces demi-cercles seront touchés chacun par une ligne droite tirée du point M donné sur la ligne AM.

Plan. 7.  
fig. 26.

Décrivez du point donné M, comme centre, par le point d'atouchement A, l'arc de cercle AK, qui coupera les circonférences des demi-cercles donnés en des points, comme B, D, F, H, K, qui seront les points d'atouchement qu'on cherche.

## R E M A R Q U E.

Lorsque les divisions de la ligne AL seront égales entre elles, on pourra se servir de ces demi-cercles pour diviser une ligne donnée en parties égales. On portera cette ligne, comme seroit AK, ou AO, du point A jusqu'à la circonférence du cinquieme demi-cercle, si on la veut diviser en cinq parties égales : elle se trouvera divisée en cinq parties égales, par la circonférence des autres demi-cercles. On divisera de la même manière en trois parties égales la ligne proposée, ou telle autre qu'on voudra comme AN, &c.

## P R O B L E M E XXIII.

*Décrire un triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.*

Plan. 8,  
fig. 27.

**T**irez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle longueur que l'une AB soit de 5 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 12 parties de la même échelle. Joignez l'hypoténuse BC, qui se trouvera précisément de 13 parties égales, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarrés 25, 144, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'aire du triangle rectangle ABC sera égale à son contour, ou à la somme des trois côtés, chacun étant 30. Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle exprimé en nombres entiers, 6, 8, 10, dont l'aire & le contour sont chacun 24.

## R E M A R Q U E.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 6, 8, 10 & 5, 12, 13, de chacun desquels l'aire soit égale à son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité, que l'on peut trouver par ce canon général qui a sa démonstration. Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 2, un triangle rectangle ; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second triangle rectangle, dont l'aire sera égale à son contour.

Plan. 8,  
fig. 27.

Comme si de 9 & de 11, on forme ce triangle rectangle, 40, 198, 202, & qu'on le divise par 9, on aura cet autre triangle rectangle  $\frac{40}{9}, \frac{198}{9}, \frac{202}{9}$  dont l'aire & le contour sont égaux, chacun étant  $\frac{440}{9}$ . Pareillement, si de 16 & de 18, on forme ce triangle rectangle 68, 576, 580, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre triangle  $\frac{68}{16}, \frac{576}{16}, \frac{580}{16}$ , ou bien celui-ci étant réduit à ses moindres termes,  $\frac{17}{4}, \frac{144}{4}, \frac{145}{4}$ , dont le contour & l'aire sont chacun  $\frac{153}{2}$ . Ainsi des autres.

Probl.  
IX.  
d'arith.  
P. 50.

## P R O B L E M E X X I V.

*Décrire au dedans d'un triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce triangle.*

**P**Our inscrire dans le triangle équilatéral ABC, trois cercles égaux, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les côtés de ce triangle, divisez chacun de ces côtés en deux également aux points D, E, F. Par ces points D, E, F, tirez

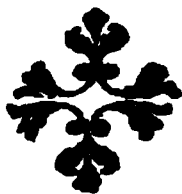
Fig. 28.

Plan. 8, aux angles opposés autant de lignes droites ; sur  
fig. 28. lesquelles vous marquerez les centres G , H , I ,  
des trois cercles qu'on cherche , en transportant  
sur chaque ligne perpendiculaire la moitié du côté  
du triangle équilatéral de son point de milieu ,  
vers le sommet de l'angle , c'est-à-dire , la moitié  
AD , ou BD , de D en G , de E en I , & de F en H.

Pour avoir le rayon des cercles cherchés , joignez deux centres G , H , par la ligne GH , qui se trouvera divisée en deux parties égales par la ligne tirée du milieu du côté CB au sommet de l'angle A. Cette moitié sera le rayon de chacun des cercles qu'on cherche : ou bien divisez GC en deux parties égales, la moitié sera aussi le rayon des cercles cherchés.

### R E M A R Q U E.

Les droites qui joignent les centres G , H , I , passent par les points d'atouchement , & forment le triangle équilatéral GHI , dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle donné ABC. Il se forme aussi trois trapézoïdes égaux AIHB , BHGC , CGIA , dont chacun a trois côtés égaux à ceux du triangle équilatéral GHI , & dont les aires sont égales chacune à la huitième partie du quarré du côté AB du triangle donné ABC.



PROBLEME XXV.

*Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres soit sesquialtere du contour aussi exprimé en nombres.*

**T**irez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle grandeur que l'une AB soit Plan. 3,  
fig. 29. de 8 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 15 parties de la même échelle. Joignez l'hypoténuse BC, qui se trouvera précisément de 17 parties égales, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarrés 64, 225, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 289. L'aire 60 du triangle rectangle ABC sera au contour 40, comme 3 est à 2. Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle en nombres entiers 7, 24, 25, dont l'aire 84 est aussi sesquialtere du contour 56, de sorte que ce contour 56 est égal aux deux tiers de l'aire 84.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 8, 15, 17, & 7, 24, 25, de chacun desquels l'aire soit sesquialtere de son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité d'autres qui ont la même propriété. On peut les trouver par ce canon général, que nous avons tiré de l'algebre. Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 3, un triangle rectangle ; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second triangle rectangle, dont l'aire sera sesquialtere du contour.

Probl.  
IX.  
d'arith.  
P. 50.

Comme si de 4 & de 7, on forme ce triangle 33, 56, 65, & qu'on le divise par 4, on aura cet autre triangle rectangle  $\frac{33 \ 56 \ 65}{4}$ , dont l'aire  $\frac{231}{4}$  est à son contour  $\frac{77}{2}$  comme 3 est à 2. Pareillement si de 16 & de 19, on forme ce triangle rectangle 105, 608, 617, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre triangle  $\frac{105 \ 608 \ 617}{16}$ , dont l'aire  $\frac{1995}{16}$  est à son contour  $\frac{661}{8}$ , comme 3 est à 2. Ainsi des autres.

## PROBLEME XXVI.

*Décrire au dedans d'un quarré donné, quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement & qui touchent aussi les côtés de ce quarré.*

Plan. 8,  
fig. 30.

Si le quarré donné est ABCD, divisez chacun de ses côtés en deux également aux points F, G, H, I, & menez les droites FH, GI, qui se couperont à angles droits & en deux également au centre E du quarré. On marquera sur ces deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche en cette sorte.

Joignez la droite HI, & retranchez-en la partie IK égale à la moitié IE de la ligne IG, ou du côté du quarré donné. Le reste HK sera le rayon de chacun des quatre cercles qu'on veut décrire. C'est pourquoi si l'on porte la longueur HK, sur les lignes FH, GI, depuis leurs extrémités F, G, H, I, aux points N, M, L, O, le problème sera résolu.

On peut encore le résoudre de cette manière : retranchez de la ligne IG, la partie IT, égale à la ligne IH ; faites les lignes EL, EM, EN, EO, égales chacune au reste TG, & vous aurez, com-



me auparavant, les centres  $L, M, N, O$ , des quatre cercles qu'on cherche, & que l'on trouvera aussi en faisant les lignes  $FN, GM, HL, IO$ , égales chacune à la partie  $ET$ .

Voici encore une autre maniere. Faites les quatre lignes  $AP, AQ, CR, CS$ , égales chacune à la ligne  $IH$ , & joignez les droites  $PQ, RS$ , qui donneront sur les deux lignes  $FH, GI$ , les centres  $L, M, N, O$ , des quatre cercles qu'on cherche.

### R E M A R Q U E.

Il est aisé à démontrer que chacune des deux lignes  $PQ, RS$ , est égale au côté  $AB$  du quarré donné  $ABCD$ , & que chacune des deux lignes  $PR, QS$ , est égale au diamètre de chacun des cercles égaux, qui se touchent. On peut encore démontrer aisément que chacun des deux triangles isosceles rectangles  $APQ, CRS$ , est égal au quarré  $DIEH$ , ou à la quatrieme partie du quarré proposé  $ABCD$ : & que le triangle isoscele rectangle  $OEN$  est égal au quarré du rayon  $Ol$ .

### PROBLEME XXVII.

*Décrire un parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres soit égale au contour.*

**T**irez les deux lignes perpendiculaires  $AB, AD$ , de telle grandeur, que l'une  $AB$ , soit Plan. 8,  
fig. 31. de trois parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre  $AD$  soit de 6 parties de la même échelle. Décrivez du point  $D$ , comme centre, & de l'intervalle  $AB$ , un arc de cercle vers  $C$ , & du point  $B$ , comme centre, & de l'in-

tervalle AD, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point C. De ce point C, vous tirerez les deux lignes CB, CD, qui acheveront le rectangle ABCD, dont l'aire est égale au contour, chacun étant 18.

### R E M A R Q U E.

Il n'y a que trois parallelogrammes rectangles dont l'aire égale au contour soit exprimée en nombres entiers : ce sont, le rectangle qu'on vient de décrire : celui qui a pour côtés des nombres doubles des côtés de celui-ci (12, 6, 1), & le carré dont le côté est 4. Mais il y a une infinité de parallelogrammes rectangles exprimés en nombres rompus, dont on peut déterminer les côtés de cette sorte.

Ayant donné au côté AD tel nombre qu'on voudra, plus grand que 2, comme 8, divisez son double 16 par le même côté diminué de 2, c'est-à-dire, par 6 : le quotient  $\frac{2}{3}$  sera l'autre côté AB. Ainsi on aura en nombres un parallelogramme rectangle, ayant 8 pour longueur, &  $\frac{8}{3}$  pour largeur, dont le contour & l'aire seront chacun  $\frac{64}{3}$ , ou  $21\frac{1}{3}$ .



PROBLEME XXVIII.

*Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses deux extrémités.*

**L**A distance à mesurer doit être d'une grandeur Pl. 9;  
médiocre, autrement il seroit difficile de la fig. 3<sup>te</sup>  
mesurer exactement avec le chapeau, parce que  
pour peu que l'on manquât à viser juste, ou à se  
tenir bien droit, on se tromperoit sensiblement  
dans la mesure, sur-tout si le terrain étoit un peu  
inégal.

Pour mesurer donc avec le chapeau la distance  
AB, qui n'est accessible qu'en son extrémité A,  
comme seroit la largeur d'une petite rivière, il  
faut que celui qui la veut mesurer se tienne bien  
droit à cette extrémité A, & qu'appuyant son  
menton sur un petit bâton, qui doit être aussi ap-  
puyé sur quelque bouton de son habit, afin que sa  
tête puisse demeurer en même état, il abaisse son  
chapeau sur le front, jusqu'à ce que le bord cache  
à sa vue l'extrémité inaccessible B de la distance à  
mesurer AB. Après quoi il doit se tourner vers un  
terrain égal & uniforme, & remarquer en regar-  
dant, par le même endroit du bord de son chapeau,  
le point de ce terrain où sa vue se terminera com-  
me en G. Alors en mesurant avec un cordeau, ou  
avec une chaîne, la distance AC, il aura la longueur  
de la distance proposée AB.



## PROBLEME XXIX.

*Mesurer une ligne horizontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrémités, par le moyen de deux bâtons inégaux.*

Pl. 9.  
fig. 33.

**P**our connoître la longueur de la ligne horizontale  $AB$ , qui représente la largeur du fossé  $ABCD$ , & qui n'est accessible qu'en son extrémité  $A$ , élevez à-plomb en cette extrémité  $A$ , le plus petit bâton  $AE$  des deux dont vous voulez vous servir pour mesurer cette ligne  $AB$ . Plantez aussi à-plomb l'autre bâton plus grand  $FG$ , en ligne droite avec la ligne à mesurer  $AB$ , & à telle distance du premier  $AE$ , que par les deux bouts  $E$ ,  $G$ , de ces deux bâtons ainsi élevés, vous apperceviez l'autre extrémité  $B$  inaccessible. Après cela mesurez exactement la distance  $AE$ , que nous supposerons de 12 pieds, & la longueur des deux bâtons  $AE$ ,  $FG$ , dont le plus petit  $AE$  sera supposé de 3 pieds, & le plus grand  $FG$ , de 5. De sorte que dans cette supposition l'excès du grand bâton  $FG$ , sur le plus petit  $AE$ , sera de 2 pieds, comme on le connoît en ôtant 3 de 5. Cet excès 2 sera le premier terme d'une règle de trois directe; 12, ou la distance  $AF$ , sera le second; 3, ou le plus petit bâton  $AE$ , sera le troisieme; & la ligne  $AB$ , qu'on cherche, sera le quatrieme: elle se trouvera de 18 pieds. Car si on multiplie le second terme 12, qui est la distance  $AF$ , par le troisieme 3, qui est le plus petit bâton  $AE$ , & qu'on divise le produit 36 par 2, qui est l'excès du grand bâton  $FG$  sur le plus petit  $AE$ , on a 18 pieds pour la longueur de la ligne proposée  $AB$ .

## PROBLEME XXX.

*Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.*

**P**Our connoître la hauteur accessible AB, par le moyen de son ombre AC, terminée par le rayon BC du soleil, élevez à-plomb le bâton DE d'une longueur prise à volonté, comme de 8 pieds, & mesurez la grandeur de son ombre DF, que nous supposerons de 12 pieds. Mesurez en même tems l'ombre AC, qui soit, par exemple, de 36 pieds. J'ai dit en même tems, parce qu'autrement le soleil changeant de place à chaque instant, les rayons BC, EF, ne seront plus parallèles; ce qui empêcheroit de pouvoir trouver la hauteur AB par cette regle de trois directe : si 12 pieds de l'ombre DF proviennent d'une hauteur DE de 8 pieds, de quelle hauteur proviendra l'ombre AC de 36 pieds? On trouvera 24 pieds pour la hauteur AB, qu'on cherche: car en multipliant le troisieme terme 36 par le second 8, & en divisant le produit 288 par le premier 12, on a pour quotient 24, qui est le quatrieme terme proportionnel, ou la hauteur proposée AB.

pl. 9.  
fig. 34.

## PROBLEME XXXI.

*Trouver à trois lignes données une quatrieme proportionnelle.*

**P**Our trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatrieme proportionnelle, décrivez des deux extrémités B, D, de la pre-

Fig. 35.

miere & de la troisieme ligne donnée, par l'extrémité commune A, les deux arcs de cercle AEF, AGH; & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE, égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G. Toute la ligne AG fera la quatrieme proportionnelle qu'on cherche.

### P R O B L E M E XXXII.

*Décrire sur une ligne donnée un parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle d'un triangle donné.*

Pl. 9, **S** I le triangle donné est ABC, & que la ligne  
fig. 36. donnée soit BE, élevez à l'extrémité E la perpendiculaire EF, qui soit la quatrieme proportionnelle à la base donnée BE, à la base AB du triangle donné ABC, & à sa hauteur CD. Achevez le rectangle BEFG, qui sera celui qu'on cherche. Ce problème n'a été mis que pour résoudre le suivant.

### P R O B L E M E XXXIII.

*Changer un triangle donné en un autre triangle dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du triangle donné.*

Fig. 37. **S** I le triangle donné est ABC, prolongez sa base AB de part & d'autre en D & en E, en sorte que la ligne AD soit égale au côté AC, & la ligne BE au côté BC; & par le moyen du problème précédent, décrivez sur la ligne DE le parallelogramme rectangle DEGF, qui soit double

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

309

du triangle donné ABC. Cela étant fait, si l'on prend sur la ligne DE, entre les points A, B, un point à discrétion, comme H, d'où l'on tire aux deux extrémités F, G, les droites FH, GH, le triangle FGH sera celui qu'on cherche, c'est-à-dire, qu'il sera égal au proposé ABC, l'un & l'autre étant chacun la moitié du rectangle FGED, & chacun de ses côtés sera plus grand que chacun des côtés du triangle donné ABC.

R E M A R Q U E.

On peut même avoir un triangle moindre que le proposé ABC, quoique tous ses côtés soient plus grands que tous les côtés du triangle ABC, en prenant le sommet H du triangle FGH au dessous de la base AB.

P R O B L E M E XXXIV.

*Deux demi-cercle qui se touchent en dedans, étant donnés sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite & les circonférences des deux demi-cercles donnés.*

**J**E suppose que les deux demi-cercles ABC, Pl. 9.  
ADE, sont posés sur la ligne droite AC, & fig. 32.  
qu'ils se touchent au point A. Pour décrire un cercle qui touche les deux circonférences ABC, ADE, & la partie EC de la ligne-droite AC, portez la longueur du demi-diamètre AG du grand demi-cercle ABC, de F, centre du petit demi-cercle ADE, en O, pour avoir la ligne AO, égale à la somme des demi-diamètres AF, AG des deux demi-cercles donnés ABC, ADE. Elevez

Pl. 9. au point E, sur AC, la perpendiculaire EB, &  
fig. 38. joignez la droite AB. Cherchez aux deux lignes  
AO, AB, une troisieme proportionnelle AH,  
pour avoir en H le point d'attouchement du cer-  
cle qu'on veut decrire, & de la ligne droite EC.  
Elevez de ce point H sur EC la perpendiculaire  
HI, quatrieme proportionnelle aux trois lignes  
AO, AH, FG, pour avoir en I le centre du  
cercle qu'on cherche, dont la circonference tou-  
chera EC en H, & les circonférences des deux  
cercles donnés, le plus grand au dedans, & le  
plus petit au dehors.

### R E M A R Q U E.

Si au dedans de l'espace terminé par les deux  
circonférences ABC, ADE; on décrit un second  
cercle qui touche le premier décrit du centre I,  
& les deux circonférences ABC, ADE, & que  
du centre K de ce second cercle on abaisse la  
droite KL perpendiculaire au diametre AC, cette  
perpendiculaire KL sera triple du rayon du cercle  
décrit du centre K. Si au dedans du même espace  
on décrit un troisieme cercle, qui touche le se-  
cond décrit du centre K, & les circonférences  
ABC, ADE, la perpendiculaire abaissée du  
centre M de ce troisieme cercle sur le diametre  
AC, sera quintuple du rayon du même cercle. De  
même, si au dedans du même espace on décrit un  
quatrieme cercle, qui touche le troisieme décrit du  
centre M, & les circonférences des deux demi-cer-  
cles, la perpendiculaire abaissée du centre P de ce  
quatrieme cercle sur le diametre AC, sera septuple  
du rayon du même cercle, & ainsi des autres, selon  
la progression des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, &c.

... Nous remarquerons ici, que tous les cercles in-



finis qui peuvent toucher les deux circonférences ABC, ADE, ont leurs centres dans la circonférence d'une ellipse, dont un axe est AO, qui a pour parametre la ligne AH.

PROBLEME XXXV.

*Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.*

**S**Oient les trois demi-cercles ABC, ADE, EIC, dont les centres F, G, H, sont sur la ligne droite AC. Ayant trouvé à la ligne FG & au rayon AF, une troisième proportionnelle AL, cherchez à la somme des deux lignes AL, AG, au rayon AG, & au rayon AF, une quatrième proportionnelle, qui sera la longueur du rayon KE du cercle que l'on cherche. Portez cette quatrième proportionnelle KI sur la ligne AC de G en M, & de F en N. Ensuite du centre F & de l'intervalle NE, décrivez vers K un arc de cercle : puis du centre H & de l'intervalle EM, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Ce point d'intersection K sera le centre du cercle cherché, qu'il ne sera pas difficile de décrire, puisque son rayon GM, ou EN, est connu. Pl. 10.  
fig. 32.

Observez que l'on auroit pu trouver le point d'intersection K, en décrivant le second arc de cercle du centre G & de l'intervalle MC.

REMARQUE.

Si l'on joint le centre K avec les centres F, G, H, des trois demi-cercles donnés, par les lignes droites FK, GK, HK, on aura les deux triangles FKG, GKH, de même contour, le contour de

chacun étant égal au diamètre AC du grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux lignes égales AF, GH.

Si entre les deux circonférences ABC, ADE, on décrit, comme dans le problème précédent, autant de cercles qu'on voudra, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les deux circonférences ABC, ADE, & que de leurs centres O, P, Q, K, on tire sur le diamètre AC, autant de perpendiculaires, la perpendiculaire KV sera égale au diamètre de son cercle; la perpendiculaire QT sera double du diamètre de son cercle; la perpendiculaire PS sera triple du diamètre de son cercle; la perpendiculaire OR sera quadruple du diamètre de son cercle; & ainsi des autres, selon la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

### P R O B L E M E XXXVI.

*Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, avec une autre ligne droite tirée par le point d'attouchement des deux demi-cercles intérieurs, & perpendiculaire à la première ligne droite, décrire deux cercles égaux qui touchent cette perpendiculaire & les circonférences des deux demi-cercles.*

Pl. 10, fig. 40. **S**Oient les trois demi-cercles donnés ABC, ADE, EOC, dont les centres F, G, H, sont placés sur la ligne droite AC, qui est coupée à angles droits au point E, par la ligne droite BE. On trouvera le rayon commun aux deux cercles égaux qui doivent toucher la perpendiculaire BE & les circonférences des deux demi-cercles, en décrivant du point A par le centre F, l'arc de cercle

Fl, puis du point I. par le point A, l'arc de cer- Pl. 10;  
cle AK; la ligne KF donnera la longueur du rayon fig. 40.  
des deux cercles égaux que l'on cherche, dont les  
centres M, N, se trouveront en cette sorte.

Ayant fait la ligne GL égale à la ligne KF, dé-  
crivez du centre G & de l'intervalle LC, l'arc de  
cercle MN, puis du centre F; & de l'intervalle  
KE un autre arc de cercle, qui coupant le pre-  
mier MN, donnera le centre M du cercle qui  
doit toucher les circonférences des deux demi-  
cercles ABC, ADE, & la perpendiculaire EB.  
Décrivez aussi du centre H & de l'intervalle FL,  
un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN,  
donnera le centre N du cercle qui doit toucher la  
perpendiculaire BE & les deux circonférences  
ABC, EOC.

*R E M A R Q U E.*

Si on joint les deux centres M, N, avec les  
trois F, G, H, par des lignes droites, on aura les  
deux triangles FMG, GNH, d'un contour égal;  
ce contour étant dans chaque triangle égal au  
diametre AC du plus grand demi-cercle donné  
ABC, à cause des deux côtés égaux GM, GN,  
de la base GH égale au rayon AF, ou FD, des  
rayons égaux MD, NO, & de la base FG égale  
au rayon EH, ou HO. De plus, le rayon MD, ou  
NO, est quatrieme proportionnel aux trois lignes  
AG, AF, FG. Enfin si on joint les droites AO,  
CD, la ligne AO sera perpendiculaire au rayon  
HO, ou NO, & touchera par conséquent les cir-  
conférences de ces deux rayons au point O: la li-  
gne CD sera aussi perpendiculaire à chacun des  
deux rayons FD, MD, & touchera par conséquent  
au point D, les circonférences de ces deux rayons.

D'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du problème.

## PROBLEME XXXVII.

*Décrire un triangle dont l'aire & le contour soient un même nombre quarré.*

Pl. 10,  
fig. 41.

**A**yant fait la base AB de 17 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, décrivez de l'extrémité A, avec l'ouverture de 9 de ces parties, un arc de cercle vers le point C, & un autre arc de cercle de l'autre extrémité B, avec l'ouverture de 10 des mêmes parties, qui coupera le premier arc de cercle en un point, comme C. Joignez les droites AC, BC, & le triangle ABC sera celui que l'on cherche, son aire & son contour étant chacun 36, dont la racine quarrée est 6.

## REMARQUE.

Fig. 422

Ce triangle a été trouvé en nombres par le moyen de ces deux triangles rectangles en nombres 72, 135, 153, & 72, 154, 170, qui sont de même hauteur; leurs nombres générateurs sont 12, 3 & 11, 7. Car joignant ensemble ces deux triangles, on a le triangle obliquangle ABC, dont la hauteur CD sera 72 à l'égard de la base AB, qui est 289, & en divisant chaque côté par la racine quarrée 17 de cette base 289, on a les trois côtés 17, 10, 9.



PROBLEME XXXVIII.

*Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, sans en connoître le centre.*

**I**L faut que les trois points proposés ne soient Pl. 10 ;  
fig. 43. pas dans une même ligne droite, mais qu'ils puissent former un triangle ACB. Pour décrire une circonférence de cercle qui passe par les trois points donnés A, C, B, sans en chercher le centre, on commencera par décrire l'arc de cercle AC en cette sorte.

Ayant imaginé les lignes AC, CB, on fera avec une carte ou du carton un angle égal à l'angle ACB, dont les côtés CA, CB, soient prolongés vers A & vers B. Après avoir appliqué cet angle de carton ACB sur l'angle ACB, on décrira l'arc CA en abaissant la pointe C vers A, de façon que le point A soit toujours appliqué le long du côté AC, en même tems que le point B demeurera appliqué le long du côté du carton CB prolongé; le point C par son mouvement décrira l'arc CA.

Le même angle de carton ABC servira à décrire l'autre arc CB: en même tems qu'on abaissera la pointe C vers B, il faut que le point B demeure appliqué le long du côté CB, & que le point A soit appliqué le long du côté AC prolongé. C'est ainsi que la pointe C décrira l'arc de cercle CB.

Mais pour décrire le troisieme arc de cercle AB sur le côté AB, on fera un angle de carton égal à l'angle ABC, dont les côtés seront prolongés vers A & vers C. On observera les mêmes précautions que l'on a observées en décrivant les deux arcs AC CB. La pointe B, par son mouvement de B vers A,

décrivit un arc soutenu par la ligne AB. Ces trois arcs AC, CB, BA, formeront la circonférence du cercle ACB, que l'on cherchoit, sans en connoître le centre.

### REMARQUE.

Pour décrire l'arc AB, au lieu de faire l'angle de carton égal à l'angle ABC, on peut le faire égal à l'angle BAC, & faire mouvoir la pointe A vers B.

### PROBLEME XXXIX.

*Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrémités étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloigné des deux autres extrémités des deux lignes données.*

Pl. II,  
fig. 44.

**S**Oient données les deux lignes égales ou inégales AB, CD, perpendiculaires à la ligne AC, qui passe par leurs extrémités A, C. On trouvera sur cette ligne AC, le point F également éloigné des deux autres extrémités B, D, en joignant ces deux extrémités par la droite BD, & en tirant à cette même ligne BD, par E, son point du milieu, la perpendiculaire EF, qui donnera sur la ligne AC le point F, que l'on cherche, de sorte que les deux lignes FB, FD, seront égales entre elles.

### REMARQUE.

Ce problème se propose ordinairement ainsi : les hauteurs AB, CD, & leur distance AC étant données, trouver sur le terrain AC le point F, en sorte que les cordes qui seront tendues depuis les

sommets *B*, *D*, jusqu'au point *F*, soient égales entre elles.

Lorsque les hauteurs *AB*, *CD*, & leur distance *AC* seront connues en nombres, comme si la hauteur *AB* étoit de 56 pieds, la hauteur *CD* de 63, & la distance *AC* de 49, on trouvera la partie *AF*, en ôtant de la somme des deux quarrés *AC*, *CD*, le quarré *AB*; & en divisant le reste par le double de *AC*. De même on trouvera la partie *CF*, en ôtant de la somme des quarrés *AC*, *AB*, le quarré *CD*; & en divisant le reste par le double de *AC*. Ainsi la partie *AF* se trouvera de 33 pieds, & l'autre partie *CF* de 16 : & chacune des deux cordes égales *FC*, *FD*, se trouvera de 65 pieds, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les deux quarrés *AB*, *AF*, ou bien les deux *CD*, *CF*; & en prenant la racine quarrée de la somme 4225.

## PROBLEME XL.

*Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes soient telles, que la différence des deux plus petites du premier triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du second, & réciproquement que la différence des deux plus petites lignes du second triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du premier.*

**T**irez premierement les deux lignes *AB*, *AC*, Pl. 11;  
perpendiculaires l'une à l'autre, de telle gran- fig. 45.  
deur que la premiere *AB* soit de 60 parties prises sur une échelle divisée en parties égales; & la seconde *AC* de 11 parties. Alors l'hypoténuse *BC* se trouvera de 61 parties, comme on le connoitra, en ajoutant ensemble les quarrés *AB*, *AC*, &

Pl. 11,  
fig. 43.

en prenant la racine quarrée de la somme 3721.  
Tirez ensuite deux autres lignes DE, EF, aussi perpendiculaires l'une à l'autre, dont la première DE soit de 119 parties, & la seconde EF de 120. Alors l'hypothénuse DF se trouvera de 169 parties, comme on le connoitra en ajoutant ensemble les quarrés DE, EF, & en prenant la racine quarrée de la somme 28561. Les deux triangles rectangles ABC, DEF satisferont au problème : car la différence 49 des deux plus petites lignes AB, AC, est égale à la différence des deux plus grandes DF, EF du second DEF. Réciproquement la différence 1 des deux plus petites DE, EF, du second triangle DEF, est égale à la différence des deux plus grandes AB, BC, du premier ABC.

R E M A R Q U E.

Ces deux différences 49, 1, se rencontrent ici des nombres quarrés, & elles seront toujours telles dans les autres couples de triangles rectangles, qu'on peut trouver par ce canon général, que j'ai tiré de l'algebre. *Le double du produit du plus grand de deux nombres quelconques par leur somme, & la somme des quarrés des deux mêmes nombres, sont les deux nombres générateurs de l'un des deux triangles rectangles que l'on cherche. Et le double du produit du plus petit des deux mêmes nombres par leur somme & la même somme des quarrés, sont les deux nombres générateurs de l'autre triangle rectangle que l'on cherche.*

De ces trois nombres générateurs, celui qui est commun aux deux triangles rectangles, est l'hypothénuse d'un troisieme triangle rectangle ; l'un des deux autres est le contour de ce troisieme



**PROBLEMES DE GEOMETRIE.** 319

triangle rectangle , & le troisieme est le même contour , en y changeant le plus grand nombre générateur du troisieme triangle rectangle au plus petit.

**P R O B L E M E X L I.**

*Diviser la circonference d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux : en sorte que le demi-diametre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.*

**S**I le demi-cercle donné est AEB , dont le centre soit D , décrivez par ce centre D , de l'extrémité B du diametre AB , l'arc de cercle DE ; & ayant divisé l'arc BE en deux également au point C , tirez les deux cordes AC , BC , entre lesquelles le demi-diametre AD , ou CD , sera moyen proportionnel.

Pl. II ,  
fig. 46.

**R E M A R Q U E.**

Il est évident que l'arc BE est de 60 degrés , par conséquent la moitié BC , ou CE , est de 30 degrés , & l'autre arc AEC de 150 degrés. D'où il est aisé de conclure , que le sinus d'un arc étant la moitié de la corde d'un arc double , & la moitié du rayon ou sinus total étant le sinus d'un arc de 30 degrés , ce sinus d'un arc de 30 degrés est moyen proportionnel entre le sinus d'un arc de 15 degrés & le sinus de son complément , ou le sinus d'un arc de 75 degrés.



## PROBLÈME XLII.

*Une échelle d'une longueur connue étant appuyée par le haut contre une muraille, & en étant éloignée par le pied d'une certaine distance, trouver de combien elle descendra lorsqu'on l'éloignera davantage du pied de la même muraille.*

Pl. II. fig. 48. **S**upposons que l'échelle EF, qui est appuyée contre la muraille ABCD, soit longue de 25 pieds, & éloignée du pied de la même muraille de 7 pieds, en sorte que la ligne FG, qui est perpendiculaire à la muraille, soit de 7 pieds. Supposons encore qu'on éloigne cette échelle de F vers H, de 8 pieds, en sorte qu'ayant la situation HI, la partie FH soit de 8 pieds, & toute la ligne GH par conséquent de 15 pieds; alors l'échelle sera descendue de la ligne EI, que l'on trouvera en cette sorte.

Multipliez la longueur EF de l'échelle par elle-même, c'est-à-dire, 25 par 25, pour avoir son carré 625. Multipliez aussi la longueur FG par elle-même, c'est-à-dire, 7 par 7, pour avoir son carré 49, qu'il faut ôter du carré précédent 625. Le reste 576 sera le carré de la hauteur EG, à cause du triangle EFG rectangle en G. C'est pourquoi si on prend la racine carrée de ce reste 576, on aura 24 pieds pour la hauteur EG.

Multipliez pareillement la longueur HI par elle-même, ou 25 par 25, pour avoir son carré 625. Multipliez aussi la longueur HG par elle-même, ou 15 par 15, pour avoir son carré 225, lequel étant ôté du précédent carré 625, il restera 400 pour le carré de la hauteur IG. C'est pourquoi si

On prend la racine quarrée de ce reste 400 , on aura 20 pour la hauteur IG. Cette hauteur étant ôtée de la hauteur EG , qui a été trouvée de 24 pieds , le reste donnera 4 pieds pour la ligne EI que l'on cherche.

## P R O B L E M E X L I I I .

*Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un Canon.*

**F**Aites avec une balle de mousquet un pendule long de 11 pouces & 4 lignes , en prenant cette longueur depuis le centre de mouvement jusqu'au centre de la balle : & au moment que vous appercevrez la lumiere du Canon , qui doit être au lieu dont vous cherchez la distance du lieu où vous êtes , mettez le pendule en branle , en sorte que les arcs des vibrations ne passent pas 30 degrez. Enfin multipliez par 100 le nombre des vibrations simples qui se seront faites depuis le moment que vous avez apperçû la lumière jusqu'à celui où vous avez entendu le bruit du coup de Canon : le produit donnera en toises de Paris la distance du lieu où vous êtes au lieu où l'on a tiré ce coup de Canon.

## R E M A R Q U E .

C'est à peu près de la même manière qu'on pourra mesurer la hauteur d'une nuée , lorsqu'elle est proche du Zenit , & qu'il y fait des éclairs & des Tonnerres ; mais cette manière de mesurer une telle distance , est fort incertaine : je ne l'ai indiqué ici que par récréation.

Elle sera plus certaine , lorsqu'on voudra mesurer

rer une médiocre distance sur la terre, dont les extrémités sont tellement situées, que de l'une on ne peut voir l'autre : mais au lieu du canon, il sera plus commode de se servir de l'arquebuse, dont le son se porte à la distance de 230 toises en une seconde de temps.

Ainsi pour mesurer cette distance, il faut par le moyen d'une horloge à pendule, compter les secondes de temps, qui se seront écoulées entre la lumière de l'arquebuse qui aura été tirée à l'une des deux extrémités de la distance proposée, & le son qui sera parvenu aux oreilles d'une personne, qui doit être à l'autre extrémité de la même distance; car en multipliant le nombre des secondes par 230, on aura en toises la longueur de la ligne proposée.

Il n'est point nécessaire de se servir des secondes d'un pendule; on peut s'en tenir aux vibrations simples du pendule fait avec une balle de mousquet. Celui qui est au pendule tire un coup, en mettant le pendule en branle; l'autre qui est à l'extrémité de la distance à mesurer, tire si-tôt qu'il l'entend, & le premier arrête le pendule dès qu'il entend le coup du second. Cette observation faite, si on multiplie le nombre des vibrations par 100, on a en toises le double de la distance, sçavoir, l'aller & le revenir du son; & si l'on en prend la moitié, on a la distance qu'on vouloit mesurer.

On a déjà remarqué qu'en mettant le pendule en branle, il ne falloit pas lui faire décrire un arc plus grand que 30° de grez : on doit ajoûter que les 22 vibrations du pendule font une lieue moyenne de France, telle qu'on en compte deux depuis le grand Châtelet de Paris jusqu'à la porte de l'Eglise de l'Abbaye de S. Denis.

M. de la Hire vouloit que le pendule ne fût long que de 9 pouces , & qu'on en multipliât les vibrations par 90 toises.

Le Pere Schot dit que par plusieurs experiences on a connu qu'un boulet de gros canon pointé horizontalement , fait une lieue d'Allemagne de 4000 pas Géométriques en deux secondes de temps ; ce qui peut servir aussi pour mesurer une distance sur la terre , s'il est vrai que la vitesse du son est égale à celle du boulet ; car ainsi l'on pourra dire que la distance en pas Géométrique est au temps en secondes entre la lumière & le coup entendu , comme 4000 est à 2 , ou comme 2000 à 1 , &c.

## PROBLEME XLIV.

*Mesurer la surface d'un Parallelogramme.*

I.

**S**Oit un Parallelogramme rectangle ABCD. , Planche 21  
dont l'un des côtés AB est de 8 toises , & l'autre AC est de 6 toises , on veut sçavoir combien il contient de toises dans sa surface. Il suffit pour cela de multiplier le côté AB , 8 , par le côté AC , 6 , le produit 48 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme rectangle ABCD. Fig. 2.

II.

Si le Parallelogramme est obliquangle , comme EIPH , dont un des côtés EF est de 3 toises , & l'autre FH est de 10 ; du sommet de quelqu'un des angles , comme de E , il faut abaisser la perpendiculaire EG , qui se trouve être ici de 2 toises , on multipliera ces 2 toises par les 10 que con- Planche 22 Fig. 3.

tient le côté FH, sur lequel on a abaissé la perpendiculaire : le produit 20 est le nombre des toises que contient la surface du Parallelogramme obliquangle EIFH.

*Procès à décider.*

**Planche 1.** Caius avoit un champ parfaitement quarré, dont Fig. 4. & 5. chaque côté étant de 6 toises ; le circuit par conséquent étoit de 24 toises. Sempronius voulant s'en accommoder, il propose à Caius de l'échanger pour une pièce de terre qui avoit aussi 24 toises de circuit, mais qui n'étoit point parfaitement quarrée : c'étoit un Parallelogramme rectangle, dont un des côtez avoit 3 toises de large, & l'autre avoit 9 toises de long.

Caius ne sçavoit point de Géométrie, & il avoit été trompé par le raisonnement captieux de Sempronius, qui lui assuroit que les figures qui ont un même circuit, sont égales entr'elles. Dans la suite ses amis lui firent connoître qu'il avoit été la dupe de Sempronius, qui lui avoit donné un champ qui ne contenoit que 27 toises, en échange d'un qui en contenoit 36.

La contestation fut portée devant le Juge du lieu, qui après avoir pris l'avis d'un Arpenteur, déclara que Caius avoit été surpris, & par conséquent que l'échange étoit nul.

*R E M A R Q U E.*

Entre deux quarez parfaits, dont l'un a le côté double du côté de l'autre, celui-là est quadruple de celui-ci. Qu'on propose deux quarez, dont l'un ait pour côté 6 pieds, & l'autre 3, le quarré qui a 6 pour côté, est quadruple de celui qui a 3.

PROBLEMES DE GEOMETRIE. 325  
pour côté ; car le premier contient 36 pieds de surface , le second en contient 9 , qui est le quart de 36.

## P R O B L E M E X L V.

*Mesurer la surface d'un Cercle.*

**I**L faut connoître le diamètre du cercle , & sa circonférence , multiplier le demi-diamètre ou rayon par la moitié de la circonférence , ou bien toute la circonférence par le quart du diamètre ; le produit sera la surface du cercle. Voyez le Probl. XII. pag. 285.

### I.

Si l'on n'avoit que le diamètre d'un cercle , & qu'il fût difficile de mesurer sa circonférence , il faudra , pour l'obtenir , faire une regle de trois , dont le premier terme sera 7 , le second 22 , & le troisième sera le diamètre du cercle dont on cherche la surface. La règle étant faite , on aura pour quatrième terme la circonférence du même cercle. On sçait , par exemple , que le diamètre d'un bassin est de 28 pieds ; pour avoir sa circonférence il faut multiplier 28 par 22 , & diviser le produit 616 par 7 , le quotient 88 est le nombre des pieds que contient la circonférence de ce bassin. Ainsi pour avoir sa surface , on multipliera 44 moitié de la circonférence par 14 moitié du diamètre , ou toute la circonférence 88 par 7 quatrième partie du diamètre 28 ; le quotient 616 donnera le nombre des pieds de la surface du cercle.

### II.

Au contraire il peut arriver qu'on connoisse la

circonférence , sans connoître le diamètre du cercle , pour lors il faut faire une règle de trois ; dont le premier terme sera 22 , le second 7 , & le troisième sera la circonférence connue : la règle faite donnera un quatrième terme , qui sera le diamètre cherché.

On a mesuré le circuit d'une Tour que je suppose être de 88 toises ; pour avoir son diamètre on multipliera 88 , circuit de la Tour par 7 , & l'on divisera le produit 616 par 22 ; le quotient 28 sera le nombre des toises que contiendra le diamètre de la Tour.

### III.

On peut encore avoir la surface d'un cercle en faisant cette règle de trois : comme 14 est à 11 , ainsi le quarré du diamètre du cercle est à un quatrième nombre , qui sera la surface du cercle cherché.

### R E M A R Q U E.

Ce qu'on a remarqué des quarez , doit aussi s'entendre de deux cercles , dont l'un auroit le diamètre double du diamètre de l'autre : je veux dire que celui qui a le diamètre double , a une surface quadruple de la surface de l'autre. Si , par exemple , un cercle a 6 pieds de diamètre , & qu'un autre en ait trois , la surface de celui qui a 6 pieds de diamètre , est à la surface de celui qui a 3 pieds de diamètre , comme 36 à 9 ou 4 à 1. On doit appliquer à la circonférence ou au circuit , ce qu'on vient de dire du diamètre.





## QUESTION I.

*Une Cuisiniere étant allée au marché, convient qu'on lui donnera pour un certain prix autant de bottes d'Asperges qu'elle en pourra lier avec une ficelle d'un pied de long ; il se trouve qu'elle en a eu quatre bottes. Le lendemain ayant besoin d'une plus grande quantité d'Asperges, elle retourne au marché, avec une ficelle longue de deux pieds. Elle offre le double du prix qu'elle a donné le jour précédent, pour avoir autant de bottes d'Asperges qu'elle en pourra lier avec la ficelle de deux pieds de long. On demande si elle n'auroit que 8 bottes d'Asperges.*

**S**Uivant les remarques précédentes, elle doit avoir seize bottes d'Asperges ; car la ficelle étant double, elle fait un quarré ou un cercle, dont le circuit est double : par conséquent la surface en sera quadruple ; c'est-à-dire, que le lien qui est double contiendra quatre fois plus que le simple.

La méthode pour résoudre ces sortes de questions, est de faire une règle de trois, dont le premier terme est le quarré de la chose proposée, le second la chose qui est contenue, & le troisième le quarré de la chose dont on veut sçavoir le contenu. Comme dans cet exemple, si 1 quarré de 1 mesure du lien, donne 4 bottes d'Asperges, combien 4 quarré de 2 mesure du second lien, dont on veut sçavoir le contenu.



## QUESTION II.

*Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques; on veut sçavoir combien une corde de 8 pieds de long entourera de piques.*

**O**N trouvera par la règle qu'on vient de proposer, que la corde de 8 pieds entourera 128 piques, en faisant cette règle de trois : si 100 quarré de 10 donne 200, combien 64 quarré de 8, longueur de la corde, dont il est proposé de connaître ce qu'elle doit contenir de piques.

## QUESTION III.

*Sempronius a emprunté de Caius un sac de blé qui avoit 5 pieds de hant & 4 pieds de large : quand il falut rendre le blé, Sempronius prit quatre sacs hauts de 5 pieds & larges d'un pied seulement. Sempronius rendit-il à Caius tout le blé qu'il avoit emprunté ?*

**I**L s'en faut de beaucoup, Sempronius ne rendit que le quart du blé que Caius lui avoit prêté.

## QUESTIONS IV. V. VI.

**O**N ne fera que proposer les questions suivantes : il sera aisé de résoudre, par les principes qu'on a posé, non-seulement celles qu'on va lire, mais encore plusieurs autres qui sont de la même nature.

Un Particulier a pour son usage un ponce d'eau; il reçoit du Magistrat la permission d'en avoir une fois davantage; il n'y a point de doute que si ce

Particulier faisoit faire un tuyau qui eût deux pouces de diamètres , il auroit quatre fois plus d'eau qu'il n'en avoit.

Une Vieille ayant acheté des marrons plein un sac pour un certain prix ; elle en demande pour le prix double dans un sac qui a deux fois plus d'étoffe dans son circuit , quoiqu'il soit de la même hauteur que le premier ; elle aura quatre fois plus de marrons.

Si on défonce deux futailles , & qu'on en fasse une seule des douves de ces deux futailles , la futaille faite des deux contiendra quatre fois plus de vin que l'une des deux n'en contenoit.

## PROBLEME XLVI.

*Tracer un ovale sur le terrain.*

**L'**Ovale a deux diamètres , dont l'un CD est Planch. 21  
Fig. 6. plus grand que l'autre EG. Sur le plus grand CD on choisit deux points A , B , qu'on appelle foyers , qui sont également éloignés des extrémités C , D du grand diamètre. On plante à ces deux points deux jalons ou piquets , auxquels on attache un cordeau AHB : ce cordeau doit être de la même grandeur que le diamètre CD : on le replie avec un troisième jalon , ou un bâton tel que vous voyez en H , & l'on conduit ce bâton , en tenant toujours le cordeau également tendu , depuis C par HE jusqu'en D. Ensuite on repasse le cordeau de l'autre côté du diamètre CD , on trace de la même façon l'autre côté CGD , & l'on a un ovale CEDG tracé sur le terrain. On l'appelle l'ovale du Jardinier , parce que c'est de cette manière que les Jardiniers le tracent.

## R E M A R Q U E.

Si on vouloit tracer un cercle , au lieu de mettre deux jalons A , B aux foyers de l'ovale , il suffiroit d'en mettre un en C , centre du cercle , on plieroit un cordeau de la longueur du rayon CA , on y attacherait un jalon en A , & l'on feroit mouvoir ce cordeau autour du jalon planté en C , de maniere que le jalon A tracerait un cercle en tenant toujours le cordeau également tendu.

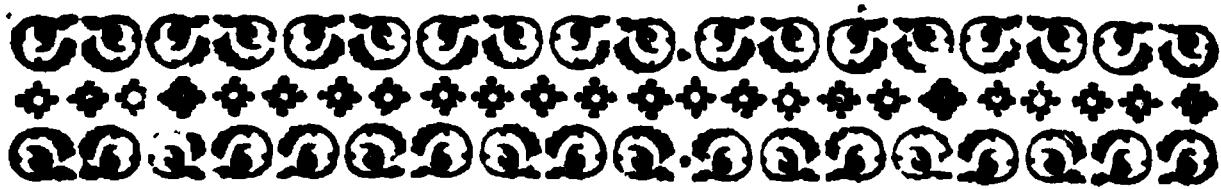
## PROBLEME XLVII.

*Mesurer la surface d'un ovale.*

**A**près avoir multiplié les deux diametres ; vous ferez une regle de trois, dont le premier terme sera 14 , le second 11 , & le troisième sera le produit des deux diametres de l'ovale dont on cherche la surface. Comme si le grand diametre CD est de 16 pieds , & que le petit soit de 9 pieds , on multipliera 9 par 16 , le produit sera 144. Ensuite on divisera par 14 le produit 1584 de 144 par 11 , & le quotient  $113 \frac{1}{7}$  sera la surface de l'ovale CEDG.

Planche 2.  
Fig. 6.





# PROBLEMES DE MUSIQUE.

**L**A Musique a pour objet le son en tant qu'il est agréable à l'organe de l'ouïe. Le son est causé par les vibrations & fremissemens du corps sonore, ou de ses parties, qui étant ordinairement transmis à l'oreille par le moyen de l'air, excitent une sensation agréable ou désagréable. On peut considerer un son seul, ou comparer plusieurs sons ensemble.

L'impression qu'un seul son cause à l'oreille est forte ou foible: elle peut aussi être plus vive ou moins vive.

Lorsque deux ou plusieurs corps sonores forment des sons, si les vibrations des uns & des autres sont telles qu'elles s'accordent ensemble de temps en temps, & par conséquent leurs impressions, cette union d'impressions s'appelle *accord*. Cet accord peut donc être exprimé par des nombres, puisque ce n'est que le rapport du nombre des vibrations du corps sonore, au nombre des vibrations d'un autre corps sonore entre les unions d'impressions. Si, par exemple, deux sons réunissent leurs impressions dans un certain temps après cinq vibrations de l'un & six de l'autre, ce rapport de 5 à 6 des vibrations de ces deux corps sonores, exprimera un accord.

Les accords se divisent en consonnances & en dissonnances. Les consonnances sont des accords

agréables à l'ouïe par eux-mêmes, on les exprime par de petits nombres, comme de 2 à 3. Les dissonances sont des accords qui sont désagréables; on les exprime par de grands nombres, comme de 15 à 16.

On considère donc dans la Musique, 1°. le son, qui se divise en tons & en demi-tons. 2°. La durée de ces tons & demi-tons, qui est ce qu'on appelle la *Mesure*. 3°. Les accords de ces tons ou demi-tons, avec d'autres qui en sont éloignés dans de certaines distances, & qui frappent l'oreille de différens tons en même temps; ce qui s'appelle *Harmonie*.

Les accords peuvent encore être exprimés par des cordes également grosses & également tendues: par exemple, cet accord  $\frac{3}{2}$  peut être marqué par la longueur de deux cordes également grosses & tendues; de sorte que la longueur de la corde qui fait le son plus grave aura trois parties: telle que la corde qui fait le son plus aigu en aura deux; car il est à remarquer que les vibrations des cordes sont en raison réciproque de leurs longueurs, c'est-à-dire, que la corde qui a trois parties, fait deux vibrations, & par conséquent un son plus grave, tandis que celle qui a deux parties fait trois vibrations, & par conséquent un son plus aigu.

## P R O B L E M E I.

*Faire sur les accords les quatre opérations de l'Arithmétique.*

### I.

**P**Our ajouter deux accords  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{6}{5}$ ; on multiplierà les numérateurs ensemble & les dénomi-

nateurs ensemble ; le produit  $\frac{18}{10}$  ou  $\frac{9}{5}$  est la somme des accords proposés.

## II.

Pour ôter un accord  $\frac{6}{5}$  d'un autre  $\frac{3}{2}$ , on renverra les termes de l'accord à ôter  $\frac{6}{5}$ , en écrivant  $\frac{5}{6}$ , on ajoutera ensemble les accords  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{6}$ , la somme  $\frac{15}{12}$  ou  $\frac{5}{4}$ , sera la différence des deux accords proposés.

Remarquez que si l'on ôtoit un grand accord  $\frac{3}{2}$  d'un petit  $\frac{6}{5}$ , on auroit  $\frac{12}{15}$  ou  $\frac{4}{5}$ , qui est le même accord que le précédent, mais renversé.

## III.

Pour multiplier un accord, on prendra les puissances des deux termes de cet accord. Si on veut doubler l'accord  $\frac{3}{2}$ , on prendra le quarré  $\frac{9}{4}$ ; si on veut le tripler, on prendra le cube  $\frac{27}{8}$ , & ainsi des autres.

## IV.

Pour diviser un accord, on prendra la racine quarrée, cubique, &c. de cet accord. Ainsi pour avoir la moitié de l'accord  $\frac{9}{4}$ , il en faut prendre la racine quarrée  $\frac{3}{2}$ . De même, pour avoir le tiers de l'accord  $\frac{27}{8}$ , ou, ce qui est la même chose pour le diviser par 3, il en faut prendre la racine cubique, qui est  $\frac{3}{2}$ , &c.

Si on propoisoit de diviser en quatre parties cet

# 334 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.

accord  $\frac{16}{15}$ , qui n'est point une quatrième puissance, il faudroit multiplier les termes de cet accord par 4, on auroit  $\frac{64}{60}$ , & prendre entre 64, 60 deux autres termes qui eussent la même différence que les termes proposés, comme  $\frac{63}{62}$ , qui sera sensiblement le quart de l'accord  $\frac{16}{15}$ . De même, pour diviser l'accord  $\frac{33}{31}$ , en 7 parties, on multipliera ces nombres par 7, & l'on aura  $\frac{231}{217}$ , entre lesquels on prendra  $\frac{225}{223}$ , qui sera sensiblement la septième partie de l'accord proposé. Ainsi des autres.

## P R O B L E M E I I

*Exprimer les accords par Logarithmes.*

**P**our avoir l'accord  $\frac{3}{2}$  en Logarithmes, on cherchera les Logarithmes de 3 & de 2, qui sont  $\begin{smallmatrix} 0.4771212 \\ 0.3010300 \end{smallmatrix}$ , ou en retranchant les trois derniers chiffres des Logarithmes, on aura  $\begin{smallmatrix} 0.4771 \\ 0.3010 \end{smallmatrix}$ , & en ôtant le petit Logarithme du grand, on aura  $\begin{smallmatrix} 0.1761 \\ 0.0000 \end{smallmatrix}$ , ou simplement 0. 1761, qui exprimera en Logarithmes l'accord  $\frac{3}{2}$ .

## R E M A R Q U E.

Quand on a les accords exprimés en Logarithmes, on peut les ajouter & les soustraire par la règle ordinaire, c'est-à-dire, par l'addition & la sou-



traction. Comme si l'on avoit ces deux Logarithmes 0. 1249 ( $\frac{4}{3}$ ) & 1761 ( $\frac{3}{2}$ ) on aura aussi leur somme 0. 3010 en les ajoutant ensemble, & leur différence 0. 0512 en ôtant 0. 1249 de 0. 1761. Mais pour multiplier un accord, il faut multiplier le Logarithme par le nombre proposé : ainsi pour quadrupler l'accord 0. 1761 ( $\frac{3}{2}$ ) on multipliera 0. 1761 par 4, & le produit 0. 7044 est le quadruple de l'accord proposé  $\frac{3}{2}$ . Au contraire, pour diviser un accord 0. 3010 ( $\frac{2}{1}$ ) en douze parties, on prendra la douzième partie du Logarithme 0. 0310, qui est 0. 0251.

### P R O B L E M E I I I.

*Partager l'intervalle de l'Octave en sept autres intervalles simples, qui sont les Tons & demi-Tons.*

**L**E plus simple de tous les accords s'exprime par ce rapport  $\frac{1}{1}$  ; il s'appelle l'Unisson : le rapport suivant  $\frac{2}{1}$  s'appelle Octave. L'Unisson & l'Octave ont tant de rapport ensemble, que les Musiciens les prennent indifféremment l'un pour l'autre. Cet autre rapport  $\frac{4}{1}$  s'appelle double Octave ; celui-ci  $\frac{8}{1}$  se nomme triple Octave, & ainsi de suite.

L'Octave peut être divisée de deux manières, numériquement ou géométriquement : on donnera ces deux divisions dans les deux articles suivans.

## I.

Pour diviser l'Octave numériquement, 1°. doublez les termes de l'Octave  $\frac{2}{1}$ , vous aurez  $\frac{4}{2}$  ; prenez le nombre 3, qui est entre les termes 2, 4, formez-en deux rapports avec les mêmes termes 4, 2, & l'Octave se trouvera divisée en  $\frac{3}{2}$ , qui est la Quinte, &  $\frac{4}{3}$ , qui est la Quarte.

2°. Doublez les termes de la Quinte  $\frac{3}{2}$ , vous aurez  $\frac{6}{4}$  ; prenez le nombre 5, qui est entre ces termes, 4, 6, formez-en deux autres rapports avec les mêmes termes 4, 6, & la Quinte sera divisée en  $\frac{5}{4}$ , qui est la Tierce majeure, &  $\frac{6}{5}$ , qui est la tierce mineure.

3°. Doublez les termes de la Tierce majeure,  $\frac{5}{4}$  ; vous aurez  $\frac{10}{8}$  ; prenez le nombre 9, qui est entre ces termes, 8, 10, formez-en deux rapports avec les mêmes termes, 8, 10, & la Tierce majeure se trouvera divisée en  $\frac{9}{8}$  qui est le Ton majeur, &  $\frac{10}{9}$ , qui est le Ton mineur. Ces deux Tons sont les premières dissonances nées de ces divisions.

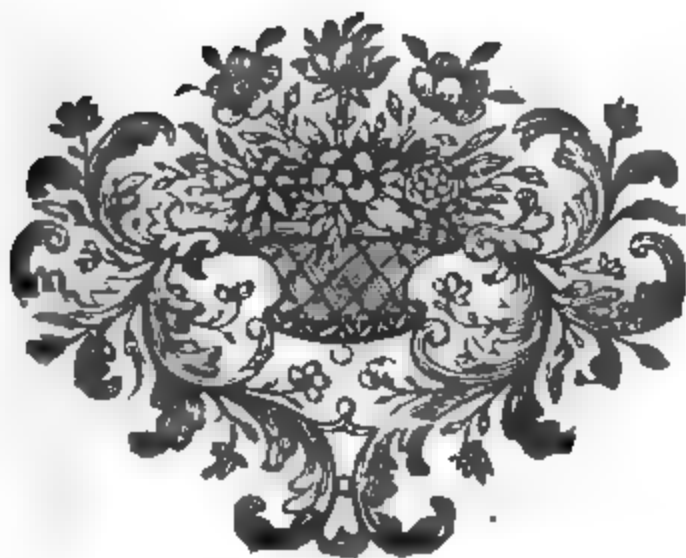
\* Problème  
me I. Art.  
II. p. 333.

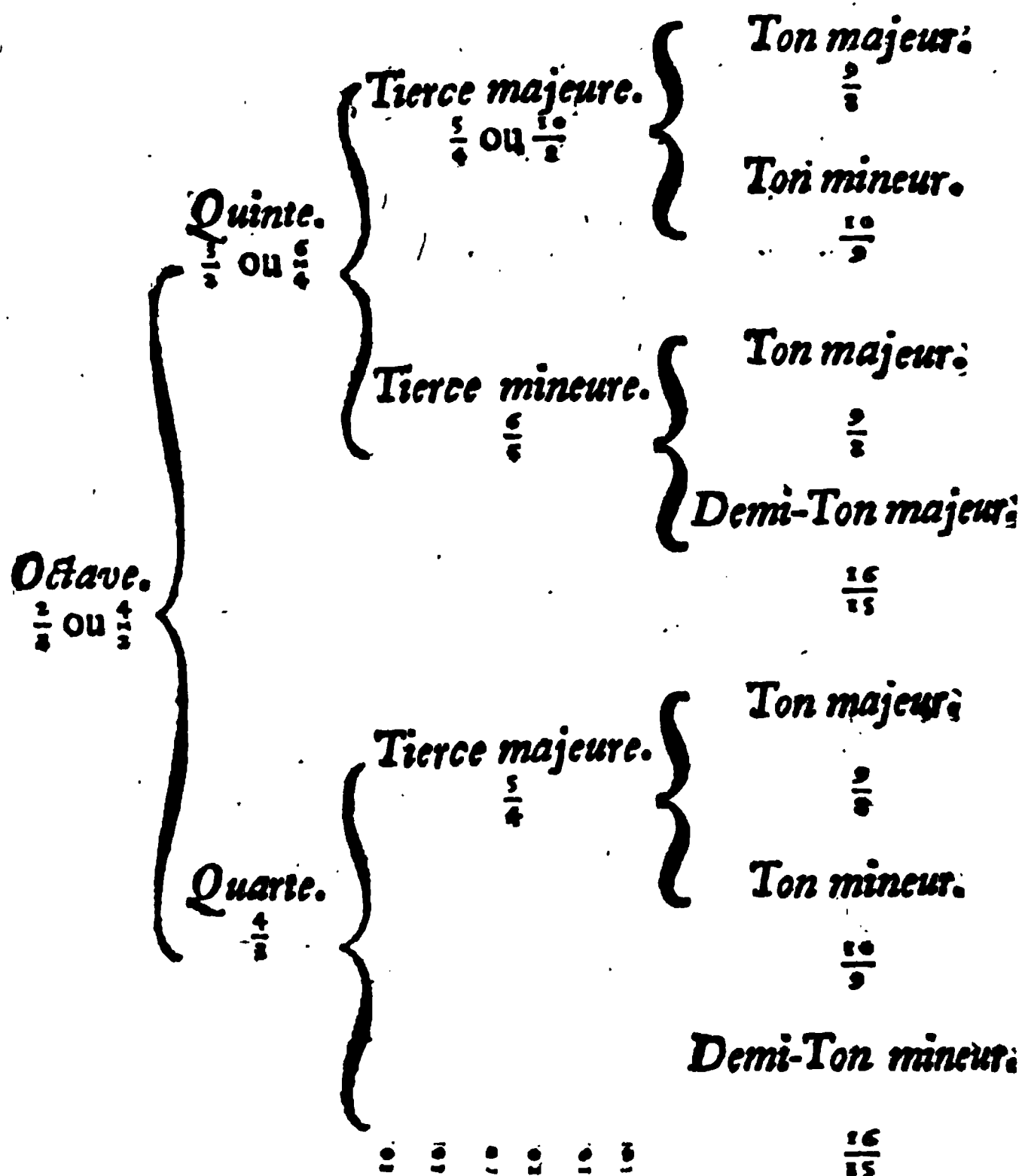
4°. Pour trouver la division de la Quarte  $\frac{4}{3}$  ; ôtez-en \* la Tierce majeure  $\frac{5}{4}$ , le reste sera le demi-Ton majeur  $\frac{16}{15}$  : ainsi la Quarte contiendra la Tierce majeure  $\frac{5}{4}$ , & le demi-Ton majeur  $\frac{16}{15}$ .

5°. Pour connoître la division de la Tierce mineure  $\frac{6}{5}$ , ôtez-en le Ton majeur  $\frac{9}{8}$ , le reste sera le  
demi-

**PROBLÈMES DE MUSIQUE. 317**

C'est ce qu'on comprendra mieux en jettant les yeux sur la Table qu'on a joint ici, où toutes les divisions que contient l'Octave se trouvent les unes sous les autres dans la dernière colonne à main droite. Ce qu'on dira dans l'article suivant servira encore d'éclaircissement à ce qu'on vient de dire.





Après avoir donné la division de l'Octave en nombres, on va le donner géométriquement en l'appliquant à une corde.

## II.

**Plan. 12.** Pour diviser l'Octave géométriquement, soit PB une corde tendue, & de telle longueur qu'il vous plaira. 1°. Divisez-la également en b, le point b marquera l'Octave, c'est-à-dire, que si l'on mettoit un chevalet en b, la partie Pb fera

L'Octave avec toute la corde PB. Pour mieux entendre ce qui vient d'être dit, il faut concevoir que s'il y avoit deux cordes également grosses & tendues, dont l'une fût égale à PB, & l'autre à Pb; PB ayant été pincée, feroit une vibration, tandis que Pb en feroit deux, suivant ce qu'on a dit ci-dessus. On doit supposer la même chose dans la suite.

Il faut faire attention que les deux moitiés de la corde séparées par le chevalet forment l'unisson qu'on a dit être exprimée par ce rapport  $\frac{1}{2}$ .

2°. Divisez bB également en E, alors PE fera la Quinte avec Pb, & la Quarte avec PB.

3°. Partagez également bE en G, alors PG fera la Tierce majeure avec Pb, & le Ton mineur avec PG.

4°. Divisez bG également en A, alors PA fera le Ton majeur avec Pb, & la Tierce mineure avec PE.

5°. Partagez PG en huit parties égales, & faites GF égale à une de ces huit parties, alors PF fera un Ton majeur avec PG, & un demi-Ton majeur avec PE.

6°. Divisez PE en quatre parties égales, portez-en une en EC, alors PC fera avec PB un demi-Ton majeur, & avec PE une Tierce majeure. Cette quatrième partie est la distance AE.

7°. Divisez EC également en D, alors PD fera le Ton majeur avec PE, & le Ton mineur avec PC.

L'Octave se trouve ainsi divisée en 7 intervalles ou 7 accords, qui sont trois Tons majeurs, deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs. Si on prend Pc moitié de PC, qui est son Octave, au

340 RECREAT. MATHÉM. ET PHYS.  
lieu des divisions de l'Octave Bb, on aura l'Octave Cc, qui contiendra les mêmes intervalles.

### REMARQUES.

On a ajouté aux divisions qu'on vient de faire de la corde PB, des nombres, qui étant comparés les uns aux autres, suivant ce qu'on vient de dire, expriment les accords qu'on a trouvé dans l'article précédent. On a d'abord l'Octave  $\frac{64}{32}$ , & les autres accords comme la Quinte  $\frac{48}{32}$ , la Quarte  $\frac{64}{48}$ , &c. Mais en prenant 30, moitié de 60, au lieu d'avoir l'Octave de 32 à 64, on a l'Octave de 30 à 60.

L'Octave & ses divisions prises entre les nombres 30 & 60, s'accorde avec les noms particuliers qu'Arétin, Moine Benedictin, a donné aux sons différens de ces divisions. On les a marqué dans la figure, quoiqu'ils soient assez connus; on sçait qu'ils ont été tirés des premières syllabes de chaque hemistiche de l'Hymne de S. Jean.

*UT queant laxis, REsonare fibris,  
MIRA gestorum FAMuli tuorum,  
SOLve polluti LABii reatum,  
Sancte Joannes.*

Si on double les nombres qui sont entre 30 & 60, on aura une seconde Octave divisée en ses accords: on auroit une troisième Octave en doublant les nombres de cette seconde Octave; & ainsi de suite pour avoir autant d'Octaves qu'on voudra.

## PROBLEME IV.

*Mesurer la durée des Tons.*

**P**Our mesurer le tems qu'on employe à marquer les Tons selon leur durée, il faut concevoir un mouvement précipité très-égal, comme le battement de l'artere, ou la vibration d'un pendule, & comptant 1, 2, 3, 4, recommencer toujours à compter de quatre en quatre, afin de se faire une juste idée de ce qu'on appelle un Temps de la Musique.

On doit ensuite s'accoutumer la main droite à marquer un mouvement à peu près semblable à celui qui vient d'être expliqué, en l'abbaisant & comptant un; en l'élevant un peu en dehors, & comptant deux; puis trois en la retirant un peu vers soi; enfin quatre, en l'élevant un peu au dessus de l'endroit où elle étoit au premier Temps, observant que les quatre divers mouvemens soient égaux, on la replacera également où elle étoit au premier: d'où on recommencera à compter 1, 2, 3, 4. Il est nécessaire de s'habituer à ce mouvement, qui sert de base à tous les autres qui se font dans la Musique, ou qui en dépendent.

## R E M A R Q U E S.

Outre ce mouvement réglé de quatre en quatre, il y a encore une autre mesure qui se regle de trois en trois; en sorte qu'après avoir compté un en baissant la main, on compte deux, comme au second Temps de la Mesure ci-devant; mais le troisième se compte en élevant la main: après quoi

on recommence à compter 1, 2, 3, comme la première fois ; & ainsi de suite.

La durée d'un Ton est réglée par un ou plusieurs de ces Temps, ou par la moitié, le quart ou la douzième partie d'un temps, ainsi qu'on le marque par les notes ou caracteres qui sont usités dans la Musique.

### P R O B L E M E V.

*Faire trembler sensiblement & à vûe d'œil la corde d'une Basse de Viole, ou de quelque autre Instrument, sans que personne y touche.*

**P**renez une Basse de Viole, ou autre semblable Instrument de Musique ; choisissez deux cordes tellement éloignées l'une de l'autre, qu'il y en ait une entre deux : accordez ces deux cordes, sans toucher à celle du milieu. Ensuite touchez un peu fort avec l'archet sur la plus grosse corde, & vous verrez qu'en même temps que celle-ci tremblera, celle qui en est éloignée, mais accordée au même Ton, tremblera aussi sensiblement, sans qu'on y touche. Ce qui est très-remarquable, c'est que la corde qui sera au milieu n'aura aucun mouvement, & qu'aussi-tôt qu'on aura mis la grosse corde sur un autre Ton, en lâchant ou serrant la cheville, ou bien en mettant le doigt sur quelque endroit de cette corde, l'autre ne tremblera plus. La chose paroîtra encore plus merveilleuse, si on l'exécute sur deux Basses de Viole.

### R E M A R Q U E S.

Cette merveille ne vient que de ce que ces deux cordes sont tellement tendues, que les vibrations



de l'une répondent aux vibrations de l'autre , en sorte que la premiere étant ébranlée , la seconde se trouve aussi ébranlée par l'entremise de l'air ; qui reçoit les mêmes frémissemens que la grosse corde , & les communique à l'autre par des vibrations qui leur conviennent ; au lieu que la corde du milieu n'étant point accordée avec les deux autres , n'est pas susceptible des mêmes vibrations , & par conséquent ne reçoit aucun mouvement.

On remarque le même effet sur deux verres que l'on met à l'unisson , en versant de l'eau peu à peu dans celui qui a le son plus clair : si on frotte le bord de l'un de ces verres avec le doigt mouillé , en sorte que l'on forme un son par ce frottement , l'autre verre , qui doit être assez proche , sera ébranlé : ce que l'on connoîtra par le mouvement d'une épingle tortuée qu'on mettra sur le bord.

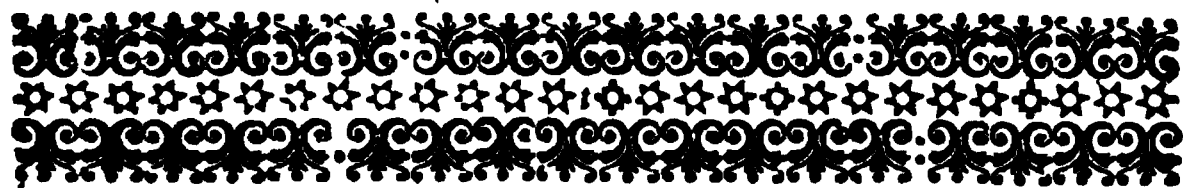
De même si deux Timbales sont à l'unisson , & que l'on frappe l'une des deux avec leur bâton , on fera sauter de la monnoye qu'on aura mise sur l'autre. On observe encore qu'en battant du Tambour , les vitres qui sont à l'unisson , en sont ébranlées , & que dans les lieux où l'on joue d'une Basse de Violon , ou de quelque autre Instrument fort , en mettant la main sur des planches , sur la forme d'un chapeau , ou sur d'autres corps un peu fermes & minces , on les fait frémir , lorsque l'on produit le son sur des cordes qui sont à l'unisson avec ces corps.

On ajoutera ici comme une chose très-curieuse ; que deux pendules posées sur une même tablette , s'accorderont à aller à la même heure , quoique leurs aiguilles n'aient point été mises d'abord à la même heure.

## A V E R T I S S E M E N T.

M. Sauveur a inventé un système de Musique ; il divise l'Octave en 43 parties , qu'il appelle Merides , & ces Merides sont encore divisées en sept Heptamerides , de sorte que l'Octave contient 301 Heptamerides : Il exprime tous les accords par Merides & Heptamerides , & il donne des noms de lettres aux différens sons de l'Octave. Ainsi au lieu de UT , RE , MI , FA , SOL , LA , SI , UT , il a imaginé sept noms PA , RA , GA , FO , BO , LO , DO , PA , qu'il applique aux sept secondes de l'Octave , dont chaque Ton contient 7 Merides , chaque demi-Ton 4 Merides. Pour exprimer les Merides & les Heptamerides , & pour varier les Tons , il change les voyelles de cette Gamme en d'autres voyelles , selon qu'il veut abaisser ou élever ces Tons.

Il a encore inventé des notes qui répondent aux différens noms , dont la Gamme est susceptible par les changemens de voyelles dont on vient de parler. Ces notes reçoivent aussi divers changemens , soit pour exprimer la durée du Temps , soit pour exprimer les Merides , Heptamerides , & même les demi-Heptamerides , par rapport à l'élevation & à l'abaissement des Tons. Elles se rangent sur une seule ligne , au commencement de laquelle on met une des Clefs , qui sont encore de l'invention de M. Sauveur , & qui servent à marquer les différentes Octaves. On peut consulter sur ce nouveau Système le Mémoire de l'Académie Royale des Sciences aux années 1701 & 1702.



# PROBLEMES D'OPTIQUE.

**L'**Optique est une science qui considère les propriétés de la lumière, & par conséquent les couleurs : elle comprend tout ce qui sert d'objet à la vue.

La lumière considérée en elle-même, peut-être regardée de trois différentes manières, 1<sup>o</sup>. En tant qu'elle est directe, c'est à-dire, que ses rayons sont envoyés du corps lumineux ou coloré vers l'œil. 2<sup>o</sup>. En tant qu'elle est réfléchie, c'est-à-dire, que ses rayons ayant frappé quelque corps poli, comme un miroir, ils sont renvoyés vers l'œil. 3<sup>o</sup> En tant qu'elle est rompue, c'est à-dire, que ses rayons ayant rencontré un corps transparent, ils le pénètrent en se brisant.

La première manière de considérer la lumière ; sert d'objet à la perspective, qui trompe agréablement l'imagination. Cette partie de l'Optique nous apprend à tracer géométriquement sur un plan la représentation des objets selon leurs dimensions & leurs situations différentes ; en sorte que ces représentations fassent sur nos yeux le même effet que feroient les objets mêmes dont elles ne sont que les images.

On examine la lumière réfléchie dans la Catoptrique, qui considère les propriétés des Miroirs plats, convexes & concaves. Cette partie suppose

que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

La Dioptrique considère les propriétés de la lumière rompue. L'expérience apprend qu'un rayon de lumière passant obliquement d'un milieu dans un autre, se détourne en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire. Il s'en éloigne si le milieu dans lequel il entre, est plus difficile à pénétrer que celui dans lequel il est ; mais il s'en approche, si le milieu dans lequel il passe est plus aisé à pénétrer que celui qu'il quitte.

L'Optique suppose aussi que les objets qui sont vus sous de plus petits angles, paroissent plus petits ; ce qui arrive ordinairement, lorsqu'ils sont plus éloignés. Sur ces suppositions, nous résoudrons plusieurs Problèmes utiles & agréables, comme vous allez voir.

## P R O B L E M E I.

*Faire qu'un objet, étant vu de loin, ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.*

Plan. II.  
Fig. 47.

**P**our faire que la ligne AB paroisse d'une même grandeur, lorsqu'elle sera mise en différents lieux plus ou moins éloignés de l'œil placé en C, il faut décrire un cercle dont la circonférence passera par l'œil, & mettre la ligne AB en tel endroit de la circonférence qu'il plaira, comme vous le voyez en ED & AB. Cette ligne étant en ED, qui est la situation la plus éloignée de l'œil, paroîtra de la même grandeur que si elle étoit en AB, qui est beaucoup plus proche : car l'œil arrêté en C, voit ces deux lignes égales AB, DE, sous les angles égaux ACB, DCE.

## REMARQUE.

Il est évident que la ligne proposée AB sera toujours vûe sous un même angle, & que par conséquent elle paroîtra toujours d'une même grandeur à quelque distance que l'œil soit de cette ligne, pourvû qu'il ne quitte jamais la circonférence du cercle qui passe par les deux extrémités A, B: ainsi sans changer la situation de la ligne AB, on peut changer celle de l'œil, en le plaçant en tel point qu'on voudra de la circonférence d'un cercle quelconque qui passe par les deux extrémités de la ligne, ou grandeur proposée AB, comme en F, ou en G: les angles visuels AFB, AGB, ACB; étant toujours égaux.

Il est aussi évident qu'une même ligne AB paroîtra toujours de la même grandeur en l'approchant de l'œil C, sans la placer dans la circonférence d'un cercle, pourvû que ses deux extrémités demeurent toujours dans les mêmes rayons visuels AC, BC, comme il arrive en lui donnant la situation AD; parce que dans cette situation elle est vûe sous le même angle visuel ACB; ce qui ne doit point changer sa grandeur apparente, quoiqu'elle soit plus proche de l'œil C.

Plan. 11.  
Fig. 50.

## PROBLEME II.

*La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrémité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vûe la plus grande qu'elle puisse être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.*

**D**ivisez la ligne AB au point F en deux parties égales AF, FB; des points A & B com-

Plan. 12.  
Fig. 7.

me centre , & de l'intervalle  $FC$  , décrivez deux arcs de cercles qui se couperont en  $G$  , du point  $G$  menez sur  $CZ$  la perpendiculaire  $GD$  : le point  $D$  fera celui où l'œil étant placé , il verra la ligne  $AB$  la plus grande qu'il la puisse voir dans toute l'étendue de la ligne indéterminée  $CZ$  : car ayant décrit le cercle  $ABD$  , il est aisé de démontrer que l'angle  $ADB$  est le plus grand de tous ceux dont le sommet sera dans la ligne  $CZ$  , & qui auront pour base la ligne  $AB$ . Tous les angles, qui sont au dessus ou au dessous de  $D$  , sont plus petits que celui qui est en  $D$ .

### REMARQUE.

Il est clair qu'en quelque point du plus grand arc  $ADB$  on place l'œil , la ligne  $AB$  sera vûe d'une même grandeur , puisqu'elle sera vûe sous le même angle.

### PROBLEME III.

*L'œil étant placé en un point comme  $B$  , & regardant vers la ligne  $AE$  , couper de cette ligne la partie  $DE$  , qui soit vûe de la même grandeur qu'une autre partie  $AC$  de la même ligne  $AE$ .*

Plan. 12.  
Fig. 8.

**A**yant tiré les lignes  $BA$  ,  $BC$  ,  $BE$  , du point  $B$  , comme centre & de l'intervalle  $BI$  , pris à volonté , décrivez l'arc de cercle  $IFH$  ; faites  $GH$  égal à  $IF$  ; par le point  $G$  menez la ligne  $BGD$  , la partie  $DE$  sera vûe de la même grandeur que la partie  $AC$  , puisqu'elles sont vûes sous les mêmes angles.

## REMARQUES.

C'est par cette égalité des angles visuels, que l'on peut écrire contre une muraille des caractères, qui bien qu'inégaux, paroîtront égaux, étant vus d'un certain point, & que l'on peut placer sur un pinacle, ou sur quelque haut frontispice une statue d'une telle longueur & d'une telle grosseur, qu'étant vue d'en bas, elle paroisse d'une grandeur proportionnée à la hauteur du lieu, sans qu'il soit besoin de polir extrêmement cette figure, & encore moins de s'arrêter aux muscles du corps, ni aux plis de la draperie, comme l'on feroit si la figure se voyoit de plus près.

Lorsqu'on voudra exécuter ce Problème sur une muraille, il faudra d'abord l'exécuter sur le papier : mais on doit prendre la distance du point de vue à la muraille, & la hauteur de la muraille ou de ses parties, afin de rapporter ces mesures sur le papier par le moyen d'une échelle. On portera les distances trouvées sur le papier à la muraille, en observant de donner autant de toises ou de pieds sur la muraille, qu'on aura trouvé sur le papier de parties qui correspondent dans l'échelle aux toises, pieds, pouces, &c.

## PROBLEME IV.

*Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.*

**I**L y a une infinité de points différens, d'où les deux parties inégales AB, BC, de la ligne droite AC, étant vues, peuvent paroître égales, parce qu'ils sont dans la circonférence d'un cercle : mais

Plan. 11.  
Fig. 49.

sans nous arrêter à la Theorie, nous enseignerons ici une méthode très-courte pour trouver un de ces points, comme vous allez voir.

Décrivez des deux extrémités A, B, & de l'intervalle AB deux arcs de cercle, qui se coupent ici au point D, d'où il faudra décrire avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle vers F. Décrivez pareillement des deux extrémités B, C, & de l'intervalle BC, deux arcs de cercle, qui se coupent ici au point E, & décrivez de ce point E, avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle, qui coupe ici en F celui que vous avez décrit du point D. Ce point F sera celui duquel les deux lignes proposées AB, BC, étant vues, paroîtront égales, à cause de l'égalité des deux angles visuels AFB, BFC.

### R E M A R Q U E.

On opérera de la même façon, lorsque les deux extrémités des deux lignes proposées AB, BC, ne se joindront pas. Nous avons enseigné dans notre *Dictionnaire Mathématique*, la manière de trouver un point, duquel trois parties inégales d'une ligne droite, étant vues, paroîtront égales.

### P R O B L E M E V.

*Un Anneau étant placé à une certaine distance ; proposer de l'enfiler avec une Baguette recourbée par l'une de ses extrémités.*

**I**L faut 1°. que celui qui se prépare à enfiler l'Anneau, puisse le toucher avec la Baguette. 2°. Qu'il n'en voye point l'ouverture. \* 3°. Qu'il  
\* C'est-à-dire, que l'Anneau doit lui présenter son bord,



ferme un œil. 4°. Qu'il essaye à enfiler l'Anneau avec le bout recourbé de la Baguette.

Il n'est pas aisé d'enfiler cet Anneau aux conditions qu'on vient de marquer. Cette difficulté vient de ce qu'avec un œil seul on ne peut pas juger de la distance des objets.

## PROBLEME VI.

*Représenter en perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vûe.*

**P** Remierement, pour trouver dans le Tableau ¶Plan. 132 l'apparence de quelque point du plan Géométral, par exemple, du point E, tirez de ce point E, la ligne EG perpendiculaire à la ligne de terre CD. Portez la longueur de cette perpendiculaire GE, de part & d'autre du point G, sur la même ligne de terre CD, aux points F, D. Après cela ayant pris à volonté sur la ligne horizontale AB, les deux points de distance A, B, tirez de ces deux points A, B, par les points D, F, les droites AD, BF, qui donneront par leur intersection l'apparence H du point proposé E.

C'est de la même façon que l'on trouvera l'apparence de quelqu'autre point du plan Géométral, & par conséquent la représentation de la base de quelque corps que ce soit, lequel se pourra représenter en perspective en tirant de tous les points de son assiette, ou plan perspectif des lignes perpendiculaires à la ligne de terre CD, & égales en apparence à la hauteur du corps proposé; ce qui se fera en cette sorte.

Ayant porté la hauteur naturelle du corps proposé, sur la ligne de terre CD, par exemple, de

C en K, tirez de ces deux points C, K, au point L pris à discrétion sur la ligne horizontale AB, les droites LC, LK, qui termineront les hauteurs apparentes de tous les points du corps proposé, en tirant de ces points des lignes parallèles à la ligne de terre CD. Comme pour trouver la hauteur du point H; on tirera de ce point H une ligne parallèle à CD, qui coupera le Triangle LCK, & donnera MN. On portera cette longueur MN en HO, qu'on fera perpendiculaire à CD. Cette ligne HO sera la hauteur apparente du corps représenté dans le Tableau.

On fera la même chose à l'égard de tous les autres points du plan perspectif, & les lignes tirées de ces points parallèlement à CD, donneront dans le Triangle LCK les hauteurs apparentes; qu'il faut élever perpendiculairement à CD à chaque point du plan perspectif, comme on vient de le faire.

## P R O B L E M E   V I I .

*Représenter en perspective un Polyèdre équilatéral;  
terminé par six quarrés égaux, & par huit  
exagones réguliers & égaux entr'eux.*

Plan. 14.  
Fig. 56.

Ceux qui entendent la perspective représenteront facilement ce corps dans le Tableau, dont le point de vûe est V, & un des deux points de distance est D, marqué sur la ligne horizontale DV, qui est parallèle à la ligne de terre AB, pourvu qu'ils en sçachent décrire le plan & le profil; ce qui se fera en cette sorte.

Premièrement, si l'on veut que ce corps s'appuie sur l'un de ses huit exagones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, on décrira de son centre C un cercle

de dont le rayon ou demi-diametre C8 , ou C9 , Pl. 14,  
soit tel , que son quarré soit au quarré de celui de fig. 56.  
l'exagone , comme 7 est à 3 ; de sorte que si le  
rayon ou le côté 1 , 2 , de l'exagone est de 65466  
parties égales , le rayon C8 , ou C9 , du grand  
cercle en contiendra 100000.

Ayant donc ainsi décrit ce grand cercle , on le  
divisera inégalement , comme vous voyez dans la  
figure , en sorte que le plus petit côté 8 , 9 , & les  
autres cinq , soient égaux chacun au côté de l'exa-  
gone , & que le plus grand 7 , 10 , & les cinq au-  
tres soient doubles chacun du plus petit ; auquel  
cas , le plus petit soutiendra un arc de 38 , 12' , &  
le plus grand , ou son double , un arc de 81 , 48' .  
Mais sans cela il sera aisé de décrire ce plan par la  
seule inspection de la figure.

Pour le profil , décrivez autour du plus petit côté  
21 , 15 , le demi-cercle 21 , O , 15 , & ayant dé-  
crit du point 4 , par le point 15 , l'arc de cercle 15  
O , joignez la droite 21 O , qui sera la hauteur  
des points 9 , 8 , 14 , 13 , 20 , 17 ; la hauteur  
des points 7 , 12 , 15 , 21 , 16 , 10 , étant égale au  
double de la ligne 21 O , & la hauteur des points  
1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , étant au triple de la même  
ligne 21 O .

Si l'on met en perspective ce plan ainsi décrit , Pl. 15,  
& que de tous ses angles on élève des perpendicu- fig. 57.  
laires à la ligne de terre , pour y mettre les hau-  
teurs convenables à celles du profil , il n'y aura  
plus qu'à joindre les côtés , comme vous voyez dans  
la figure 56 , & encore mieux dans la 57 fig. que  
nous avons représentée en plus grand volume ,  
pour vous faire mieux distinguer les côtés qu'il  
faut joindre , dont ceux qui sont marqués par des  
lignes noires , sont ceux qui paroissent à l'œil , &

les autres qui sont marqués par des lignes ponctuées, sont ceux qu'on ne voit pas.

Pl. 15. Secondement, si l'on veut que le corps s'appuie  
fig. 58. sur l'une de ses six surfaces quarrées, comme sur le quarré  $ab$ , 15 21, le plan, ou l'assiette de ce polyedre changera, & elle sera telle que vous la voyez dans la figure 58, qu'il ne faut que regarder pour la comprendre, pour le moins, quand on sçaura que le grand côté de l'octogone irrégulier, comme  $d12$  est égal à la diagonale  $a15$ , ou  $b21$  du quarré intérieur qui sert de base au polyedre.

Pl. 16. Le profil change aussi, car la hauteur des points  
fig. 59. 3, 7, 10, 6, est égale à la moitié  $cd$  du grand côté  $d12$  de l'octogone irrégulier, la hauteur des points 4, 5, 17, 16,  $m$ ,  $d$ , est égale au côté entier  $d12$ , la hauteur des points 14, 20,  $n$ ,  $c$ , est égale au même côté  $d12$ , & à la moitié  $cd$ ; enfin la hauteur des points  $a$ ,  $b$ , 15 21, est double du même côté  $d12$ , dont le quarré est au quarré du rayon de l'octogone irrégulier, comme 4 est à 5; ce qui fait que si le rayon est de 100000 parties égales, le grand côté  $d12$  en contient 89442, & soutient un arc de 53, 8', & que le petit côté  $dm$  en comprend 63245, & soutient un arc de 36, 56'. Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis le polyedre en perspective, comme vous voyez dans la 59 fig.



PROBLEME VIII.

*Représenter en perspective un polyedre équilateral, terminé par six quarrés égaux, & par huit triangles équilatéraux, & égaux entre eux.*

**S**I vous voulez que le polyedre s'appuie sur l'un Pl. 16.  
de ses six quarrés égaux, comme 9, 10, 11, fig. 60.  
12, il n'y aura qu'à lui circonscrire un autre quarré,  
& le plan sera achevé, dont le profil est tel.

La hauteur des points 5, 6, 7, 8, est égale à la  
moitié 3, 5, du côté 6, 5, du quarré circonscrit,  
& la hauteur des points 1, 2, 3, 4, est égale au  
côté entier 6, 5, ou à la diagonale 11, 9, ou 10,  
12, du quarré inscrit, qui sert de base au po-  
lyedre.

Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous Pl. 17.  
avons mis ce polyedre en perspective, comme fig. 61.  
vous voyez dans la 61 fig. qui vous fait voir dis-  
tinctement les côtés qu'il faut joindre, quand on a  
trouvé dans le tableau l'apparence des points qui  
bornent leurs extrémités.

PROBLEME IX.

*Représenter en perspective un polyedre équilateral, terminé par six quarrés égaux, & par douze triangles isosceles & égaux entre eux; dont la hauteur est égale à la base.*

**P**Remierement, si vous voulez que le polyedre Pl. 17.  
s'appuie sur l'un de ses six quarrés égaux, fig. 62.  
comme 3, 6, 9, 12, son assiette sera telle que  
vous la voyez dans la figure, où les demi-cercles

qui sont décrits des quatre angles droits de la base 3, 6, 9, 12, des milieux A, B, des deux côtés opposés 5, 2, & 12, 9, font assez connoître la description de ce plan, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

Pour le profil, nous dirons que la hauteur des points 4, 11, 7, 8, 1, 14, est égale à la touchante 7, 15, & que la hauteur des points 5, 6, 13, 12, est double de la précédente, c'est-à-dire, double de la même touchante 7, 15. Après quoi  
Pl. 18, il n'y a plus qu'à regarder la 63 fig. pour com-  
fig. 63. prendre la manière de représenter ce polyedre en perspective, que je vous représente encore tout ombré, & vu d'une autre façon, dans la 64 fig.

Pl. 19. Secondement, si vous voulez que le polyedre  
fig. 64. soit élevé droit sur l'un de ses angles solides, comme 1, auquel cas son assiette sera le simple exagone régulier, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dont le centre sera le  
Fig. 65. point 1, & le profil sera tel.

La hauteur des points 8, 9, 10, 11, 12, 13, est égale à la moitié du côté de l'exagone: la hauteur des points 2, 3, 4, 5, 6, 7, est égale au triple de la précédente, c'est-à-dire, à trois moitiés du côté de l'exagone: & la hauteur du point 1 est double du côté de l'exagone; ou égal au diamètre 4, 7.

Je n'enseignerai pas ici la manière de représenter en perspective ce polyedre selon son plan & son profil, parce que nous en avons suffisamment parlé dans notre traité de perspective; c'est pourquoi je  
Pl. 20. me contenterai de vous en donner simplement ici  
fig. 66. la figure.

## PROBLEME X.

*Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par douze quarrés égaux, par huit hexagones réguliers & égaux, & par six octogones réguliers & égaux.*

**S**I vous voulez que la base de ce corps soit l'un de ses six octogones comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le centre est O, joignez les extrémités de deux côtés opposés & paralleles par des lignes droites paralleles entre elles, qui par leurs mutuelles intersections, formeront un quarré, comme ABCD. Prolongez les deux côtés opposés & paralleles, 1, 2, 5, & 6, & pareillement les deux côtés opposés & paralleles 3, 4, 7 & 8, qui, en rencontrant les deux premiers, formeront un autre quarré plus grand EFGH. Après quoi il sera facile d'achever le plan; sçavoir, en faisant la ligne E 20, égale à la partie E 7, &c.

Pl. 21.  
fig. 68.

Pour une description plus exacte de ce plan, on considérera qu'en supposant le rayon O1, ou O2, de 1000 parties égales, le rayon O13, ou O16, du cercle moyen, comprend 1514 de ces parties, & que le rayon O12, ou O15 du plus grand cercle en contient 1731. Que le plus petit côté soutient dans le plus grand cercle un arc 11, 12, ou 14, 15, de 25 degrés 32'; dans le moyen un arc 1, 2, de 29 degrés 16'; & dans le plus petit un arc 12, de 45 degrés. Et que le plus grand côté soutient dans le plus grand cercle un arc 14, 11, de 64 degrés 28'; & dans le cercle moyen un arc 10, 13, ou 9, 16, de 60 degrés 44', dont la corde est double du plus petit côté 9, 10.

Pour le profil, on donnera toute la ligne 15, 12, à la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont l'assiette est l'octogone intérieur, ou le plus petit octogone régulier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On donnera la partie 15 G, à la hauteur des points 9, 10, 13, 25, 22, 21, 18, 16, dont l'assiette est l'octogone moyen. On donnera la partie 15, 2, à la hauteur des points 14, 11, 12, 24, 23, 20, 19, 15, dont l'assiette est le plus grand octogone. On donnera la partie 15, 1, à la hauteur des points 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, dont l'assiette est le plus grand octogone. Enfin l'on donnera la partie 15, H, à la hauteur des points 40, 41, 28, 29, 32, 33, 36, 37, dont l'assiette est l'octogone moyen.

La hauteur 15, 12, se trouvera de 2930 parties, dont le rayon  $O_1$  du plus petit octogone en contient 1000. La hauteur 15, G, est de 2389 semblables parties : la hauteur 15, 2, en contient 1848 : la hauteur 15, 1, comprend 1082 : enfin la hauteur 15 H, en contient 541.

Pl. 22.  
fig. 70. Quand on aura mis en perspective le plan de ce polyèdre terminé par 26 faces, & qu'on aura déterminé la position de ses angles solides suivant leurs hauteurs différentes, que le profil précédent vous donne, on joindra ces angles solides par des lignes droites, qui seront les côtés égaux du polyèdre, comme vous voyez dans la figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

### *Des miroirs plats.*

Ce qu'on va dire des miroirs plats, doit s'entendre des miroirs de glaces, quoiqu'on puisse en appliquer une grande partie à ceux de fonte, d'acier, &c.



## PROBLEME XI.

*Un point de quelque objet & le lieu de l'œil , étant donnés , trouver le point de réflexion sur la surface d'un miroir plat.*

**S**OIT B un point de l'objet , A l'œil , & le mi- Pl. 21,  
fig 51.  
roir représenté par la ligne CD. Du point B menez à CD la perpendiculaire BD que vous prolongerez jusqu'en F , en sorte que DF soit égale à DB. Par les points F & A , tirez la ligne AF , qui coupera CD en E. Ce point E sera le point de réflexion cherché : de sorte que si l'on tire les deux lignes AE , BE , l'angle de réflexion AEC sera égal à l'angle d'incidence BED , comme il est aisé de le démontrer.

## REMARQUE.

Dans notre *dictionnaire de mathématiques* on trouve ce problème appliqué à un miroir sphérique : mais il se peut aisément appliquer au jeu de billard. Supposons que la ligne CD représente un bord du billard , & qu'aux deux points A , B , du tapis ou table du même billard , il y ait deux billes , dont l'une , comme A , ne peut être envoyée directement contre l'autre B , à cause du fer qui est entre deux. On trouvera le point E , comme il vient d'être enseigné , & ce point E sera celui où le joueur enverra la bille A , afin que par une bricole elle puisse toucher l'autre bille qui sera en B. Mais dans la pratique , cela se peut exécuter plus facilement en cette sorte.

On trouvera , dis-je , le point E , en prolon-

geant par la pensée la perpendiculaire BD jusqu'en F, en sorte que la ligne DF soit égale à cette perpendiculaire BD, & en ayant mis en F une marque visible, le joueur poussera sa bille A, selon la ligne AF. Alors cette bille A, rencontrant le bord du billard en E, se réfléchira, & ira rencontrer la bille B; mais on doit observer de pousser fortement la bille A, pour surmonter les défauts du billard.

Comme dans ce jeu il n'est pas toujours facile, ni même permis de mettre une marque visible en F, parce que l'adversaire a la liberté de l'ôter, il faut que le joueur vise du point F la bille A, & qu'il remarque par le rayon visuel FA, le point E sur le bord du billard, où il doit envoyer sa bille pour la faire réfléchir en B.

Pl. 11.  
fig. 52. Si vous voulez trouver le point E de réflexion, pour faire que la bille A rencontre la bille B par deux bricolles, tirez du point A, la ligne AC, parallele à la ligne DG, & du point B, la ligne BG parallele à la ligne CD. Cherchez à la somme des deux lignes paralleles AC, GD, à la ligne AC, & à la somme des deux lignes paralleles CD, BG, une quatrieme proportionnelle, dont la longueur étant portée en CE, donnera le point E qu'on cherche.

## P R O B L E M E XII.

*Tirer par derriere l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue.*

Pl. 13.  
fig. 53.

Soit AB une ligne qui représente le miroir, & CD la perpendiculaire menée à ce miroir de C, but où l'on veut tirer. Soit encore D l'image ou apparence de ce but, qui paroîtra sur cette per-

pendiculaire aussi éloignée au-delà du miroir, que le but C l'est en deçà. Soit enfin l'œil placé en E, qui regarde le but en D par la ligne de réflexion EFD. Le rayon d'incidence sera la ligne CF, selon laquelle il faut placer le pistolet GH derrière l'épaule, & le tourner de manière que son apparence IK convienne avec la ligne de réflexion EFD, & soit dirigée vers l'apparence D du but C. Le pistolet GH ainsi tourné regardera directement le but C & ne manquera point de le frapper, si on lâche le coup.

### P R O B L E M E X I I I.

*Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface d'un miroir plan, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.*

**S** I l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface CD d'un miroir plan, tirez de l'objet B, la ligne indéfinie BF, perpendiculaire à cette surface, & prolongez le rayon de réflexion AE, jusqu'à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en un point, comme F; ou bien faites DF égal à DB. Le point F sera le lieu de l'image de l'objet B, c'est-à-dire, le point où l'objet B sera vu par l'œil A, dans le miroir plan CD: car l'optique apprend que l'image d'un objet se fait au concours du rayon de réflexion & d'une ligne droite tirée de l'objet perpendiculairement à la surface du miroir, soit que cette surface soit plane, soit qu'elle soit sphérique.

Pl. 11.  
fig. 51.

D'où il est aisé de conclure, par l'égalité des angles de réflexion & d'incidence, que quand le

Pl. 11. miroir est plan, comme nous le supposons ici,  
fig. 51. l'objet doit être vu aussi enfoncé dans le miroir,  
qu'il en est éloigné; & c'est à cause de cela que  
nous avons fait la ligne DF égale à la perpendicu-  
laire DB.

Il s'ensuit aussi que la distance AF de l'image E  
est égale au rayon d'incidence BE & au rayon de  
réflexion AE, parce que le rayon d'incidence BE  
est égal à la ligne EF, à cause de l'égalité des deux  
triangles rectangles EDB, EDF.

Il s'ensuit encore que si l'œil A s'approche ou  
s'éloigne dans le même rayon de réflexion AE du  
point de réflexion E d'une certaine quantité,  
l'image F de l'objet B sera approchée ou éloignée  
de l'œil A de la même quantité; parce que la dis-  
tance EF demeurant toujours la même, la distance  
AF croîtra ou décroîtra comme la distance AE.

Il s'ensuit de plus que quand le miroir plan est  
parallèle à l'horison, comme CD, une grandeur  
perpendiculaire à l'horison, comme BD, doit pa-  
roître renversée; & que quand le miroir plan est  
perpendiculaire à l'horison, la main droite d'une  
personne lui doit paroître à la gauche de son image,  
& la gauche à la droite.

Enfin il s'ensuit que la distance de l'œil à l'image  
de quelque objet vu dans le dernier miroir par  
plusieurs réflexions, à l'aide de plusieurs miroirs  
plans, est égale à la somme de tous les rayons d'in-  
cidence & de réflexion, & qu'un objet se peut  
quelquefois multiplier dans un miroir plan, lors-  
qu'il est de verre.

C'est ainsi que l'on voit quelquefois qu'un flam-  
beau allumé paroît double dans un miroir plan de  
verre un peu épais, à cause de la double réflexion  
qui s'y fait, l'une sur la surface extérieure du mi-

roir, & l'autre sur le fond du même miroir. Car la lumière ne se réfléchissant pas toute sur la surface extérieure du miroir, elle pénètre la glace, & va rencontrer cette feuille d'étain qu'on met derrière, pour empêcher les rayons de passer outre, où elle se réfléchit une seconde fois. L'œil se rencontrant dans le concours des deux rayons de réflexion, qui ne peuvent être parallèles, il ne faut pas s'étonner si on voit l'objet double, ou en deux endroits différens du miroir. Il est évident que la diverse irrégularité du verre, produisant diverses réflexions, peut multiplier davantage l'objet, surtout lorsqu'il sera vu un peu de côté.

#### PROBLEME XIV.

*Se représenter dans un miroir comme volant.*

**I**L faut placer une grande glace, de sorte qu'elle fasse un angle demi-droit avec l'horison, ou le plancher d'une chambre. Si on avance vers le miroir ainsi incliné, & qu'on étende les bras en les agitant, comme les oiseaux font leur ailes, le corps paroîtra horizontal à la terre, & il semblera voler en l'air : mais il faut porter toute son attention vers sa tête, afin de ne point jeter les yeux sur le pavé, qui est aussi élevé que les pieds.

#### PROBLEME XV.

*Disposer plusieurs miroirs de maniere qu'on se voye dans chacun en même tems.*

**O**N disposera ces miroirs à la circonférence d'un cercle, de telle sorte qu'ils conviennent avec les cordes de ce cercle. Pour se voir dans

chacun de ces miroirs, il faut se placer au centre du cercle.

### R E M A R Q U E.

C'est par le moyen de ce problème qu'on peut faire voir plusieurs jets d'eau dans une chambre optique, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

### P R O B L E M E X V I.

*Un mari jaloux étant dans une chambre, lui faire voir ce que fait sa femme dans une autre chambre, l'un & l'autre étant près de la muraille qui sépare les deux chambres.*

Pl. 23.  
fig. 9.

**Q**ue la figure ABCD représente les deux chambres où se trouvent le mari & la femme: que EH soit la muraille qui sépare ces deux chambres: que le mari soit en G, & la femme en H.

Il faut laisser entre la muraille de séparation & le plancher une ouverture où l'on puisse placer horizontalement un miroir comme E. Il faut encore en mettre deux autres F & I aux deux murailles AC, BD, de manière que les rayons qui partiront du point H, ayant frappé quelque point du miroir I, aillent frapper le miroir E; d'où s'étant réfléchis, ils tomberont sur le miroir F, & de-là se réfléchiront en G, où nous avons supposé que le mari s'étoit posté: il sera témoin de toutes les actions de sa femme. Il est vrai que s'il ne veut pas être apperçu, il ne doit point avoir de lumière, ou bien il doit fermer les volets des fenêtres de la chambre où il est, si c'est pendant le jour qu'il veut satisfaire sa jalousie. Les glaces dont on se

sert à présent pour orner les salons, sont très-commodes pour ce sujet. La lumière ayant été obligée de se détourner à la rencontre des trois miroirs, s'affoiblira quelque peu.

## R E M A R Q U E.

On pourroit par ce moyen, étant dans une chambre, voir tout ce qui se passeroit dans la rue, si on mettoit le miroir sur la tablette de la fenêtre, & qu'on le disposât de manière que les rayons des objets qui viendroient frapper le miroir, pussent se réfléchir dans la chambre. Mais pour n'être point vu, il faudroit fermer les volets des fenêtres, & ne laisser d'espace qu'autant qu'il seroit nécessaire pour laisser passer les rayons des objets qu'on voudroit voir. Si on laissoit le miroir dans la même disposition pendant la nuit, & que la chambre fût fort éclairée, on pourroit voir de la rue tout ce qui s'y passeroit.

## P R O B L E M E XVII.

*Faire paroître dans un miroir, un autre objet que celui qui semble devoir y être représenté.*

## I.

**P**lacez une glace de miroir plus élevée que la hauteur d'un homme, en l'inclinant tant soit peu à l'horison, s'il est nécessaire; mettez quelque objet vis-à-vis de ce miroir, de manière qu'il semble que les rayons de cet objet ayant frappé le miroir, dussent être renvoyés à l'œil. Au dessus du premier objet placez un autre objet, qui sera caché par quelque artifice, dont les rayons pourtant ayant frappé le miroir, seront réfléchis

vers les yeux des spectateurs. Alors le miroir représentera autre chose que ce qu'il paroît devoir représenter. Si on a placé devant le miroir un cercle, il représentera un quarré. Ayant mis la statue d'un homme, on verra un lion, ou quelque autre animal; ou bien ayant placé une pendule qui marque une certaine heure, elle paroîtra marquer dans le miroir une heure toute contraire.

## I I.

On placera une grande glace, qui ira assez près du plancher, auquel on fera une ouverture entre des solives, avec assez d'artifice pour que ceux qui sont dans la chambre ne s'en apperçoivent point. On mettra quelque image fort éclairée dans la chambre au-dessus, de manière qu'elle puisse être vue dans le miroir par ceux qui y regarderont. On sera fort étonné de voir ces objets qui ne paroissent point dans la chambre.

Au lieu de mettre l'image dans une chambre au dessus du miroir, on peut la mettre dans une chambre à côté, en ménageant adroitement une ouverture dans la muraille de séparation.

## R E M A R Q U E.

C'est-là le fondement de ces curiosités d'optique, qui donnent tant d'admiration aux spectateurs. Lorsqu'on est dans une chambre entièrement obscure, & qu'on regarde vers un côté où sont placées des glaces, dont on ne s'est point apperçu auparavant, à cause d'un rideau qui étoit au devant, on voit avec étonnement le ciel représenté avec les étoiles, le soleil levant, des mers ou des lacs, des vaisseaux, des tours, des montagnes, des villes, des



canons, dont on apperçoit la lumière, lorsqu'ils tirent pour rendre le salut aux vaisseaux qui passent. On y voit enfin tout ce qu'une adresse ingénieuse peut inventer pour donner un plaisir qui est d'autant plus grand, que l'on ne sçait point d'où viennent tous ces objets : l'esprit inquiet croit que c'est quelque enchantement, quoique ce spectacle agréable ne vienne que du lieu qui est au-dessus des spectateurs.

### P R O B L E M E X V I I I.

*Faire une boîte où l'on voye des objets tous différens de ceux que l'on avoit vu en regardant par une autre ouverture, quoique les uns & les autres paroissent occuper toute la boîte.*

**I**L faut faire une boîte qui ait plusieurs côtés, Pl. 23, comme celle-ci AEDIHM, qui en a six. On fig. 10. séparera le dedans de la boîte en plusieurs cellules par des ais qui iront de chaque angle A, E, D, &c. au centre de la boîte G. Il y aura autant de séparations que de côtés, on appliquera à chacun de ces ais des miroirs plats; on fera à chaque côté de la boîte des ouvertures comme *h* 1, pour regarder dans les séparations; on mettra à ces ouvertures des morceaux de verre, dont la face qui sera au dedans de la boîte, ne doit point être polie, mais un peu usée, afin qu'on ne puisse pas voir ce qui est dans les cellules. On mettra dans ces cellules ou séparations les objets qu'on voudra : enfin on couvrira le dessus de cette boîte d'un parchemin fort mince, pour donner passage à la lumière.

Quand on regardera par une ouverture, on verra les objets de cette cellule représentés dans les miroirs, & l'on croira qu'ils occupent toute la

boîte ; mais en regardant par une autre ouverture on y verra d'autres objets qui paroîtront encore occuper toute la boîte , & ainsi des autres.

### R E M A R Q U E.

Pour rendre plus transparent le parchemin qu'on met sur les machines d'optique , il faut le laver plusieurs fois dans une lessive claire , que l'on changera à chaque fois : on le lavera pour la dernière fois dans de l'eau de fontaine. Enfin on le mettra sécher à l'air en le tenant étendu avec des cloux , ou avec des morceaux de bois.

Si on veut donner de la couleur à ce parchemin , on se servira pour le verd , de verd de gris délayé dans du vinaigre , avec un peu de verd foncé ; pour le rouge , de l'infusion de bois de bresil ; pour le bleu , du suc de jeunes myrthes ; pour le jaune , de l'infusion faite avec des bayes de nerprun cueillies au mois d'août. On passera de tems en tems un vernis sur le parchemin.

### P R O B L E M E XIX.

*Faire une machine d'optique , où il paroîtra une galerie , ou une allée d'arbres , &c , continuée à l'infini.*

Cette boîte au lieu d'être poligone , comme celle qu'on vient de décrire , sera quarrée ; on lui donnera environ un pié & demi de face , plus ou moins , selon qu'on jugera à propos. On appliquera sur chaque face perpendiculaire intérieure , des glaces : on fera au milieu d'une des faces une ouverture ronde d'environ un ponce de diamètre ,

mettre , & à cet endroit on ôtera l'étraiu qui est sut la glace , afin qu'on puisse regarder dans la boîte : sur le fond intérieur , on mettra tels objets qu'on voudra , comme une gallerie , une allée d'arbres , &c. accompagnées de bâtimens superbes , de jardins , de campagnes , de bois & autres ornemens qu'on imaginera : enfin , on couvrira cette boîte d'un parchemin semblable à celui dont on a parlé dans le problème précédent. En regardant par l'ouverture du milieu d'une des faces , il semblera que les objets mis au fond de la boîte , seront continués à l'infini. Si c'est une gallerie , par exemple , composée de colonnes , on la verra très-longue , & allant toujours en diminuant ; ce qui fait un très-bel effet.

**R E M A R Q U E.**

A l'imitation de ces machines d'optique ; on pourroit construire des cabinets revêtus de glaces , dont l'effet rempliroit le spectateur d'admiration. On a des glaces assez grandes pour faire ces sortes de cabinets. Ce seroit un ouvrage superbe , & qui mériteroit l'attention des curieux. Il faudroit au dessus de ces glaces laisser des ouvertures qu'on fermeroit de quarrceaux de verre , pour donner du jour dans ces cabinets.

Après les problèmes qu'on vient de proposer , il ne sera point difficile d'imaginer des machines d'optique , qui seront composées de celles qu'on a décrites , & qui seront très-curieuses , à cause des différens objets vus de diverses manieres , qui surprendront lorsqu'on les regardera.

*Observations diverses sur les miroirs plats.*

## I.

Dans un miroir plat , ce qui est à droite paroît à gauche , & ce qui est à gauche paroît à droite , & lorsqu'on l'éleve au dessus de la tête , les pieds & le pavé paroissent en haut , tandis que la tête paroît en bas.

## II.

Si on se regarde la tête dans un miroir depuis le menton jusqu'au front, l'espace qui comprend cette grandeur prise sur le miroir , n'est que la moitié de cette grandeur même, c'est-à-dire, de la tête. La même chose arrivera à l'égard de tous les objets qui seront aussi éloignés du miroir que l'œil en est éloigné.

## III.

Si on approche un objet d'un miroir dont la glace est épaisse , on y remarque deux images ; l'une est bien éclairée , & l'autre est représentée avec une lumière plus foible.

## IV.

Lorsqu'on approche fort obliquement une bougie allumée , de l'extrémité d'un miroir , & qu'on met l'œil à peu près aussi obliquement à l'extrémité opposée , on apperçoit plusieurs images de la lumière de la bougie , dont les uns sont plus foibles que les autres.

## V.

Si on dispose à angles droits deux miroirs , & qu'on s'approche de l'un en suivant une ligne qui lui soit perpendiculaire , il paroîtra que la même

personne se meut en sens contraire. Car dans celui qui est parallele à la personne qui marche, elle paroîtra aller d'un sens comme du septentrion au midi; mais dans le miroir dont elle s'approche, elle paroîtra aller d'un sens contraire, c'est-à-dire, du midi au septentrion.

V. I.

Si deux miroirs font un angle obtus un peu plus grand qu'un droit par rapport à celui qui regarde, il se verra avec un seul œil; mais s'ils font un angle aigu un peu plus petit qu'un droit, il se verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, &c. l'angle des miroirs étant plus obtus ou moins aigu, on verra d'autres figures grotesques.

V II.

Si on dispose dans un cabinet de jardin plusieurs miroirs, les uns plus bas & inclinés à l'horison, & les autres plus haut, aussi inclinés à l'horison, ceux qui entreront dans ce cabinet, se verront d'une figure monstrueuse.

V I I I.

Les objets représentés dans un miroir plat, paroissent autant enfoncés derriere le miroir, qu'ils en sont éloignés par devant. Ainsi pour voir un objet qui est dans un petit espace, comme s'il étoit fort éloigné, il faut lui faire faire plusieurs réflexions sur des miroirs disposés sur les faces d'un poligone.

I X.

Quand on présente quelque écriture à un miroir, elle paroît d'un sens contraire. S'il y a **ARREST**, les lettres paroissent recurvées, &

on lit du même sens qu'il faut les mettre dans les formes des imprimeries.

## PROBLEME XX.

*Mesurer une hauteur par réflexion.*

I.

Pl. 13,  
fig. 54.

**S**I la hauteur est accessible, comme AB, en sorte qu'on puisse approcher de son extrémité B, & connoître de combien on en est éloigné, lorsqu'on est dans un plan horizontal, & au niveau de cette base B, faites sur ce plan horizontal à une distance connue du point B, un petit creux C, que vous remplirez d'eau. Vous vous éloignerez de ce petit creux, de manière que vous puissiez voir dans l'eau le sommet A de la hauteur à mesurer AB, par le rayon de réflexion CE, qui passe par l'œil que je suppose en E. Mesurez exactement la hauteur de l'œil ED, & la distance CD du point C de réflexion. Nous supposerons la hauteur ED de 4 pieds, la distance CD de 3, & la distance BC de 48. Après quoi on dira, par la règle de trois directe, si la distance CD de 3 pieds donne 4 pieds pour la hauteur ED, combien donnera la distance BC de 48 pieds? & l'on trouvera 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche; car en multipliant ensemble les deux derniers termes, 4, 48, & en divisant leur produit 192, par le premier 3, il vient 64, pour le quatrième proportionnel.

II.

Mais si la hauteur AB est inaccessible, en sorte qu'on ne puisse pas mesurer actuellement la dis-  
tan-

Le BC, il faudra dans la même plaine faire en ligne droite sur CB prolongée, un autre creux à une distance connue du premier C, comme F; qu'on remplira pareillement d'eau. La même personne s'éloignera encore, de manière qu'elle puisse voir le même sommet A, par le rayon de réflexion FH, qui passe par l'œil que je suppose en H. J'ai dit la même personne, afin que la hauteur de l'œil GH soit la même que la première DE, que nous avons supposée de 4 pieds. Comme nous avons supposé la distance CD de 3, si l'on suppose la distance CF de 32, & la distance FG de 5, en multipliant ensemble les lignes ED, CF, c'est-à-dire 4, 32, & en divisant le produit 128 par l'excès 2 de la distance FG sur la distance CD, on aura 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche.

R E M A R Q U E.

Si vous voulez connoître la distance BC, sans sçavoir la hauteur AB, multipliez ensemble les deux distances CD, CF, c'est-à-dire 3 & 32, & divisez leur produit 96 par l'excès 2 de la distance FG, sur la distance CD. Le quotient donnera 48 pieds pour la distance BC.

*Des miroirs cylindriques & sphériques.*

P R O B L E M E X X I.

*Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface convexe d'un miroir sphérique, étant donnés, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.*

**S** I l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface convexe DEL d'un miroir

Pl. 21;  
fig 69.

Pl. 23,  
fig. 69.

Sphérique, dont le centre est C; tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui sera perpendiculaire à la surface du miroir sphérique. C'est dans cette ligne BC que sera l'image de l'objet B, savoir, au point H, qu'on trouvera en prolongeant le rayon de réflexion AE, qui rencontre ici au dedans du miroir la cathete d'incidence BC au point H; car il la peut rencontrer au point D de la surface du miroir, & au dehors, savoir, lorsque l'angle d'incidence BEF, ou l'angle de réflexion AEG sera très-petit; ce qui fait que l'objet B peut être vu au dedans du miroir sphérique, comme ici, quelquefois en sa surface, & quelquefois au dehors.

### S C H O L I E.

La touchante FG, qui passe par le point E de réflexion, détermine, comme vous voyez, les angles d'incidence & de réflexion, & coupe la cathete d'incidence BC en I, de telle sorte que les quatre lignes BC, CD, BI, DI, sont proportionnelles, & que par conséquent la ligne BC se trouve coupée aux points I, D, dans la moyenne & extrême raison proportionnelle, c'est à dire, que le rectangle sous toute la ligne BC, & sa partie du milieu DI, est égale au rectangle sous les deux autres parties extrêmes BI, CD, comme on le démontrera aisément, en tirant par le point B, la ligne BK parallèle au rayon de réflexion AE.

Il est évident, par la propriété des foyers d'une ellipse, que les deux points A, B, sont les foyers d'une ellipse qui touche le miroir sphérique au point de réflexion E, & qui a pour grand axe la somme des deux rayons AE, BE, de réflexion & d'incidence. Ainsi pour trouver le point de réflexion



xion E, il n'y a qu'à décrire une ellipse qui touche la circonférence DEL, & dont les foyers soient les deux points A, B : ce qui se peut aisément faire par l'intersection de la circonférence DEL, & d'une hyperbole entre ses asymptotes, dont l'opposée passe par le centre C de la même circonférence DEL, comme nous avons démontré dans notre *dictionnaire mathématique*. Pl. 21,  
fig. 62.

Il est évident aussi, que l'apparence H de l'objet B est plus proche du point de réflexion E, que du centre C : car la ligne CH est toujours plus grande que la ligne EH, puisque l'angle CEH est toujours plus grand que l'angle ECH, comme on le connoîtra en prolongeant vers L le rayon d'incidence BE, & en lui tirant par le centre C, une parallèle MN.

Il est encore évident, que la même apparence H de l'objet B, est aussi plus proche du point de réflexion E, ou du point D, de la surface du miroir que l'objet B, c'est-à-dire, que la ligne EH est moindre que le rayon d'incidence BE, & que la ligne DH est moindre que la cathete d'incidence BD.

Enfin il est évident, que si la grandeur OE est perpendiculaire à la surface du miroir sphérique DEL, en sorte qu'étant prolongée elle passe par son centre C, le point P, plus proche du miroir, doit paroître moins enfoncé que le point O, plus éloigné : & que cette grandeur OE doit paroître renversée & plus petite.

D'où il suit qu'une grandeur doit paroître dans un miroir sphérique convexe toujours plus grande à mesure qu'elle s'approche du miroir parallèlement à soi-même, parce qu'alors elle paroît moins enfoncée, & par conséquent plus près de l'œil, &

qu'elle se trouve renfermée dans un plus grand angle. Il arrivera la même chose si l'objet demeure immobile, & que l'œil s'approche du miroir, parce qu'alors il verra cet objet moins enfoncé dans le miroir, & par conséquent plus grand, puisqu'il le verra de plus proche.

## PROBLEME XXII.

*Déterminer le lieu de quelque objet vu par réflexion sur la surface d'un miroir cylindrique.*

Pl. 20.  
fig. 67.

**C**E problème est assez difficile, parce qu'un miroir cylindrique étant pris selon sa longueur, peut être considéré comme un miroir plan : étant pris exactement selon sa rondeur, il peut être considéré comme un miroir sphérique : enfin étant pris en tout autre sens, il participe des propriétés d'un miroir plan & d'un sphérique.

C'est pourquoi si l'œil & le point de quelque objet sont dans un plan qui passe par l'axe du miroir cylindrique, ce point sera vu par réflexion dans le miroir cylindrique, comme dans un miroir plan, je veux dire aussi enfoncé dans le miroir qu'il en sera éloigné.

Comme si l'on suppose l'œil B & un point A de quelque objet, dans un plan qui passe par l'axe CD du miroir cylindrique EFGH, ce point A sera vu par le rayon de réflexion BLM, en M, qui est le point où se rencontrent ce rayon de réflexion & la ligne ALM, perpendiculaire à la commune section EH du miroir & du plan qui passe par l'œil & par le point de l'objet A. Dans ce cas, il est évident que l'objet A paroît aussi enfoncé dans le miroir, qu'il en est éloigné, c'est-à-dire, que les

lignes AL, LM, sont égales entre-elles, à cause des deux triangles rectangles égaux AIL, MLI.

Mais si l'œil & le point de l'objet sont dans un plan parallèle à la base du miroir cylindrique, comme la section de ce plan & du miroir est un cercle, l'objet paroîtra dans ce miroir cylindrique, comme nous avons vu qu'il devoit paroître dans un miroir sphérique \*. D'où il suit que les grandeurs parallèles à la base d'un miroir cylindrique y paroissent fort raccourcies, & que celles qui sont parallèles à l'axe du même miroir, y paroissent presque de la même grandeur, comme dans un miroir plan. Cela est encore vrai dans un miroir conique, comme il est aisé de le démontrer.

\* Prob.  
précéd.

### PROBLEME XXIII.

*Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface concave d'un miroir sphérique, étant donnés, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.*

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface concave FEG d'un miroir sphérique, dont le centre est C, tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui étant prolongée, rencontre ici le rayon de réflexion AE, aussi prolongé, au point H, qui sera l'image ou la représentation de l'objet proposé B, parce que ce point H est le contour du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CD tirée du centre C par l'objet B.

Pl. 22,  
fig. 72

### REMARQUE.

Si l'objet avoit été plus près du miroir, comme

Pl. 22. en K , son apparence I se seroit trouvée de l'autre  
fig. 71. côté , sçavoir , au concours du rayon de réflexion  
AE , & de la cathete d'incidence CI , tirée du  
centre C par l'objet K. Si l'objet étoit en L , on  
ne le verroit point du tout , parce que dans ce cas  
la cathete d'incidence FG , tirée du centre C par  
l'objet L , ne rencontreroit point le rayon de ré-  
flexion AE , ces deux lignes étant parallèles. Enfin  
si l'objet étoit en M , son apparence N se trouve-  
roit en dehors , sçavoir , au concours du rayon  
de réflexion AE , & de la cathete d'incidence CN ,  
tirée du centre C par l'objet M.

Par-là on voit la raison de ce que l'expérience  
nous fait connoître , sçavoir , qu'un objet peut être  
vu par réflexion dans un miroir concave , comme  
dans un convexe , hors de la surface du miroir ,  
comme est ici le point N , qui est l'image de l'ob-  
jet M , & en dedans , comme H , qui est l'image  
de l'objet B , ou I qui est l'image de l'objet K. Ces  
deux images H , I paroissent enfoncées dans le  
miroir , mais jamais tant que dans un miroir plan.  
Cela vient des différens concours des rayons de  
réflexion , & des cathetes d'incidence , qui peu-  
vent faire voir les objets quelquefois en la surface  
du miroir , quelquefois en dedans , & d'autres  
fois en dehors & par devant , plus ou moins loin  
du miroir ; de sorte qu'on les voit tantôt entre  
l'objet & le miroir , tantôt au lieu même où est  
l'objet ; ce qui fait que l'on peut manier l'image de  
sa main ou de sa face hors du miroir : tantôt plus  
loin du miroir que l'objet n'en est éloigné , & tan-  
tôt au lieu même où l'œil est placé. D'où il arrive  
que ceux qui en ignore la raison , ont peur , & se  
retiennent quand ils voyent sortir du miroir l'image  
d'un épée ou d'une dague , que quelqu'un tient  
derrière eux.

Il est évident que la touchante  $OP$ , qui passe par le point  $E$  de réflexion, détermine l'angle d'incidence  $BEP$ , & son égal, ou l'angle de réflexion  $AEO$ ; & que la ligne  $CE$ , qui est perpendiculaire à la touchante  $OP$ , divise en deux également l'angle  $AEB$ , fait par les rayons d'incidence & de réflexion. D'où il suit que si l'on divise en deux également cet angle par une ligne droite, cette ligne droite passera par le centre  $C$  du miroir sphérique, parce qu'elle sera perpendiculaire à la touchante  $OP$ .

Il est aisé de juger que l'objet  $B$  peut être vu par réflexion en deux endroits différens, lorsque l'œil est placé en un certain point : car si on mène un rayon d'incidence quelconque  $BE$ , avec son rayon de réflexion  $AE$ , & un autre rayon d'incidence  $BQ$ , avec son rayon de réflexion  $QR$ , il rencontrera le premier en un point, comme  $A$ , où l'œil étant mis, il verra l'objet  $B$  par les deux rayons de réflexion  $AE$ ,  $AQ$ , & par conséquent en deux endroits différens, sçavoir, aux points  $H$ ,  $R$ , au dedans & au dehors du miroir.

Il est aussi facile de juger que si l'objet est placé au centre  $C$  du miroir, son image se réfléchit contre lui-même : car dans ce cas l'angle d'incidence est droit. C'est pourquoi celui qui aura l'œil au centre  $C$  du miroir, ne pourra voir autre chose que lui-même.

## PROBLÈME XXIV.

### *Des miroirs ardents.*

**N**ous avons vu dans le problème précédent, que deux rayons de réflexions, qui appartiennent. Voyez le probl. XIII de physiq.

Pl. 22, nent à un même objet, comme AE, AQ, qui  
fig. 71. appartiennent à l'objet B, s'unissent & se rencontrent au point A, au devant du miroir; ce qui n'arrive point aux miroirs plans, où les rayons de réflexion s'écartent, & encore moins aux miroirs convexes, où les rayons de réflexion s'écartant encore davantage, s'unissent au-delà du miroir. D'où il suit que par leur moyen on ne peut pas produire du feu, comme l'on fait avec un miroir concave, qu'on appelle pour cela *miroir ardent*, & qui peut être parabolique ou sphérique.

Il est facile de faire des miroirs sphériques, parce que le tour peut aisément servir à en faire des modèles, & qu'on peut aisément les polir: mais le tour ne peut pas être mis si facilement en usage, pour faire des modèles qui puissent servir à construire des miroirs paraboliques; ce qui fait qu'ils sont très-rares, & qu'ils ne sont pas si bons que les sphériques, quoique selon la théorie, ils dussent être meilleurs. C'est pourquoi nous parlerons seulement ici des miroirs sphériques.

Pl. 24, Soit donc ABC la surface concave d'un miroir  
fig. 72. sphérique bien poli, dont le centre soit D, & un demi-diamètre BD. Soit EF un rayon de lumière parallèle au demi-diamètre BD, qui se réfléchissant par le rayon de réflexion FG, coupera le demi-diamètre BD, en un point, comme G, plus proche de la surface du miroir sphérique, que de son centre, c'est à dire, que la ligne BG sera toujours plus petite que la ligne DG, comme on le connoîtra en tirant le demi-diamètre DF, & menant GK perpendiculaire au milieu de DF: le triangle FGD sera isoscèle: les lignes DG, GF, seront plus grandes que DF, égal à BD. Ayant donc ôté DG de part & d'autre, il restera

GF, égal à DG, plus grand que GB.

Pl. 23.

fig. 72.

Il est aisé de juger que si de l'autre côté il y a un rayon de lumière HI, parallèle au même demi-diamètre BD, & aussi éloigné de ce demi-diamètre BD, que le rayon EF, en sorte que les arcs BF, BI, soient égaux, ce rayon HI se réfléchira par le rayon IG, qui passera par le même point G. Si ce rayon de lumière étoit plus ou moins éloigné du demi-diamètre BD, son rayon de réflexion ne couperoit pas ce demi-diamètre BD au même point G; mais en quelque lieu qu'il le coupe, ce point de rencontre sera toujours plus éloigné du centre que de la surface du miroir. Or, comme on peut concevoir une infinité de rayons différens parallèles entre eux, & au demi-diamètre BD, & également éloignés du même demi-diamètre BD, il est évident que tous ces rayons doivent se réfléchir en un même point, comme G, qu'on appelle foyer. C'est dans ce point qu'on peut aux rayons du soleil allumer une bougie, ou un flambeau, fondre en peu de tems quelque métal que ce soit, & vitrifier la pierre, quand le miroir est un peu grand.

On peut aisément connoître par la trigonométrie la distance de ce foyer G à la surface du miroir, la distance du rayon d'incidence ou de lumière étant connue en degrés, & le demi-diamètre du miroir étant connu en pieds ou en pouces. Comme si le rayon d'incidence EF est éloigné du demi-diamètre BD, par exemple, de 5 degrés, en sorte que l'arc BF, ou l'angle BDF soit de 5 degrés; & si l'on suppose le demi-diamètre DB, ou DF de 100000 parties, on trouvera en ces mêmes parties la distance DG, en tirant du foyer G la ligne GK perpendiculaire au demi-diamètre DF,

**Pl. 24.** qui sera divisé en deux également au point K; ce  
**fig. 72.** qui fait que la moitié DK sera de 50000 parties,  
 & en faisant dans le triangle DKG cette analogie,

|                                  |        |
|----------------------------------|--------|
| <i>Comme le sinus total</i>      | 100000 |
| <i>A la sécante de l'angle D</i> | 100382 |
| <i>Ainsi la ligne DK</i>         | 50000  |
| <i>A la ligne DG</i>             | 50191  |

ce nombre 50191 étant ôté du demi-diamètre BD, ou de 100000, il restera 49809 pour la ligne GB, ou pour la distance du foyer à la surface concave du miroir.

C'est de cette manière que nous avons supputé la table suivante, où l'on voit que le foyer G s'approche toujours de la surface concave d'un mi-

|    |       |    |       |    |       |    |       |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|
| 1  | 49992 | 16 | 47985 | 31 | 41668 | 46 | 28022 |
| 2  | 49970 | 17 | 47715 | 32 | 41041 | 47 | 26686 |
| 3  | 49932 | 18 | 47427 | 33 | 40382 | 48 | 25276 |
| 4  | 49878 | 19 | 47269 | 34 | 39689 | 49 | 23787 |
| 5  | 49809 | 20 | 46791 | 35 | 38961 | 50 | 22214 |
| 6  | 49725 | 21 | 46443 | 36 | 38197 | 51 | 20549 |
| 7  | 49625 | 22 | 46073 | 37 | 37393 | 52 | 18787 |
| 8  | 49509 | 23 | 45682 | 38 | 36549 | 53 | 16918 |
| 9  | 49377 | 24 | 45268 | 39 | 35662 | 54 | 14935 |
| 10 | 49229 | 25 | 44831 | 40 | 34730 | 55 | 12828 |
| 11 | 49064 | 26 | 44370 | 41 | 33749 | 56 | 10586 |
| 12 | 48883 | 27 | 43884 | 42 | 32798 | 57 | 8196  |
| 13 | 48685 | 28 | 43372 | 43 | 31634 | 58 | 5646  |
| 14 | 48468 | 29 | 42832 | 44 | 30492 | 59 | 2920  |
| 15 | 48236 | 30 | 42265 | 45 | 29289 | 60 | 0000  |

roir sphérique, à mesure que les rayons d'incidence s'éloignent du centre du miroir; de sorte que quand ils en sont éloignés de 60 degrés, le foyer



G se trouve précisément au point B de la surface concave du miroir.

On voit aussi dans cette table, que les rayons d'incidence, depuis un degré jusqu'environ à 15 degrés de distance, s'unissent par réflexion presque en un même point, parce que la distance du foyer G ne décroît pas sensiblement. Ce qui fait qu'une telle quantité de rayons envoyés du soleil sur la surface concave d'un miroir sphérique, qui peuvent passer pour parallèles, à cause de la grande distance du soleil à la terre, se réfléchit presque en un même point. Par conséquent tous les rayons de réflexion qui se trouvent compris dans une portion concave de sphere d'environ 30 degrés, peuvent par leur union produire du feu, comme l'expérience le montre.

On voit encore dans la table précédente, que le foyer G est éloigné de la surface concave du miroir d'environ la quatrième partie du diamètre, ou de la moitié du demi-diamètre BD, & que par conséquent un miroir concave sphérique doit brûler d'autant plus loin, que son diamètre sera plus grand. il ne faut pourtant pas croire qu'il puisse brûler à une distance énorme; car outre la difficulté qu'il y auroit à faire un miroir assez grand, pour produire cet effet; les rayons de réflexion qui s'unissent en un très-petit espace vers G dans un petit miroir, ne s'uniroient pas si parfaitement dans un grand miroir, ce qui diminueroit considérablement la force des rayons. Ainsi il n'est pas croyable qu'Archimede se soit servi d'un miroir concave pour brûler la flotte des Romains à une distance de 375 pas géométriques, qui reviennent à 1875 pieds.

## C O R O L L A I R E.

Pl. 24, Il suit de ce qui a été dit dans ce problème &  
fig 72. dans le précédent, que si l'on met un corps lumineux, comme une chandelle, au foyer, G ses rayons se réfléchiront par des lignes parallèles entre elles & au demi-diamètre BD : & que si on la met au centre D, ses rayons se réfléchiront contre eux-mêmes, parce qu'alors ils seront perpendiculaires à la surface du miroir.

On peut par le moyen d'un semblable miroir, représenter tels caractères qu'on voudra sur une muraille obscure, pourvu que le miroir n'en soit pas fort éloigné. On écrira sur la surface concave du miroir avec de la cire ou autre matière, des lettres renversées, & d'un caractère un peu gros, & on exposera le miroir au soleil, de manière que les rayons renvoyés vers la muraille, y fassent paroître les lettres, qui se trouveront dans leur situation ordinaire.

On peut aussi, par le moyen du même miroir, augmenter la lumière dans une grande chambre, en appliquant une bougie allumée au foyer de ce miroir; car les rayons de cette bougie se réfléchiront par toute la chambre, & feront une telle clarté, qu'on pourra aisément lire de loin sur les murailles.

Enfin on peut se servir de la même façon de ce miroir pour s'éclairer la nuit, & voir de bien loin ce qui se passe : il peut être utile à ceux qui veulent conserver leur vue, en se servant de la lumière d'une lampe mise au foyer du miroir, qui doit être placé un peu haut, & à côté, afin qu'il puisse envoyer commodément la lumière de la lampe sur la table ou l'on veut lire, ou écrire.

*Remarques*

*Remarques sur les miroirs concaves.*

## I.

Les miroirs ardens se font ordinairement de métal ; la réflexion s'y fait plus facilement , & l'effet en est plus prompt & plus vigoureux. On peut aussi les faire de verre , la réflexion s'y fera presque aussi bien , pourvu que le verre soit bien net & un peu mince , que l'enduit en soit bon , pour empêcher les rayons d'incidence de traverser & de se briser.

## II.

Pour trouver facilement le foyer d'un miroir concave , quand il est exposé aux rayons du soleil , il faut éloigner ou approcher du miroir une petite piece de bois , ou de quelqu'autre matiere solide , en telle sorte que le disque de lumiere qui paroîtra par réflexion contre cette piece , paroisse le plus petit qu'il sera possible ; car alors la piece se trouvera au foyer. Ou bien on mettra de l'eau chaude auprès du miroir du côté de la concavité qui regarde directement le soleil : la fumée qui sortira de cette eau chaude , fera voir avec plaisir le cone de réflexion , dont la pointe sera le foyer. Ou bien encore on jettera de la poussiere au-devant de la concavité du miroir qui regarde directement le soleil ; on connoîtra dans cette poussiere , comme dans la fumée , le cone de lumiere réfléchi , & par conséquent sa pointe , qui sera le foyer qu'on cherche. On peut même en hyvet remarquer ce foyer & tout le cone de réflexion sans poussiere & sans fumée , lorsque l'air sera grossier & condensé par le froid.

## I I I.

Quoiqu'il semble que pour produire du feu par le moyen d'un miroir concave, il doive être éclairé des rayons du soleil, afin que la réflexion s'y puisse faire, on peut néanmoins en produire dans un lieu obscur, en renvoyant les rayons du soleil contre la concavité de ce miroir par le moyen d'un miroir plan, qui doit être un peu grand, afin qu'un plus grand nombre de rayons s'unissant au foyer, puisse brûler avec plus de force.

## I V.

Wolfius remarque dans sa catoptrique, que Kirker étant à Sirastuse, avoit observé que la distance à laquelle les vaisseaux des Romains auroient dû être brûlés, n'étoit que de trente pas. Quoique cette distance soit bien moindre que celle qu'on a rapporté sur la fin du problème XXIV, elle est cependant encore assez considérable pour faire douter de la vérité du fait; puisqu'Archimède auroit dû se servir d'une portion de sphere dont le diamètre auroit eu plus de 120 pieds. Une telle portion de sphere auroit fort approché de la figure plate, & par conséquent elle n'auroit pu faire un grand effet. On dit encore que Proclus, par le même artifice qu'Archimède, brûla la flotte de Vitalien qui assiégeoit Bisance; mais la vérité de ces faits est fort incertaine, pour la raison qu'on vient de dire.

## V.

Il vaut mieux s'en tenir à ce que dit le même Wolfius de quelques miroirs qui sont très-remarquables. Manfrede Septala, chanoine de Milan,

avoit un miroir parabolique , dont le foyer étoit à 15 ou 16 pas , où il brûloit des morceaux de bois. Vilette , ouvrier de Lyon , avoit fait trois miroirs , dont les effets rapportés par Wolfius , sont très-dignes de remarque ; leur foyer étoit assez large , & n'étoit éloigné que de trois pieds. L'un de ces miroirs fut présenté au roi de Perse par Tavernier , connu par ses voyages : l'autre fut acheté par le roi de Dannemark , & le troisieme fut donné au roi de France. M. Tschirnaus en avoit fait un qui l'emportoit sur tous ceux-là : il étoit composé d'une lame de cuivre , qui n'étoit gueres plus épaisse que deux fois le dos d'une lame de couteau ordinaire : la largeur du miroir étoit d'environ trois aulnes de Lipsick , & son foyer n'avoit que deux de ces aulnes de distance. Voici quelque-uns de ses effets.

1°. Il mettoit le feu en un moment à un morceau de bois mis à son foyer ; la flamme exposée au plus grand vent , ne s'éteignoit point. 2°. Il faisoit bouillir l'eau avec tant de violence , que les œufs qu'on y mettoit étoient bien-tôt cuits , & si on laissoit l'eau un peu de tems , elle s'évaporoit entièrement. 3°. Un morceau d'étain ou de plomb présenté au foyer se fondoit goutte à goutte , & étoit percé en deux ou trois minutes. 4°. Des lames de fer , d'acier , de cuivre , d'argent , &c. devenoient rouges sur le champ , & étoient percées en moins de six minutes. 5°. Les pierres , les briques , & les autres matieres qui ne se liquéfient point , devenoient rouges comme un fer ardent. 6°. L'ardoise , les tuiles , les morceaux de pots cassés , qui avoient souffert un feu violent , les pierres de ponce , les morceaux de creuset , les os , les mottes de terre se changeoient en verre.

## V I.

A l'imitation du miroir de M. Tschirnaus, un artisan de Dresde en fit quelques-uns de bois, qui produisoient des effets presque aussi surprenans. Trabere rapporte qu'on peut faire des miroirs ardens avec des morceaux d'or, \* ou de verre. On les dispose dans une jatte de bois, creusée en forme de miroir sphérique; on les y attache avec de la poix mêlée de cire, dont on a enduit également le dedans de la jatte. Zahn rapporte aussi qu'un ingénieur nommé Neuman, fit \* à Vienne en Autriche, un miroir concave, qui étoit composé de carton fort & de paille collés ensemble. Ce miroir avoit assez de force pour faire fondre toutes sortes de métaux.

\* Auro  
strepero

\* En  
1699.

## V I I.

Il y a du plaisir à regarder dans les miroirs concaves, sur-tout lorsque ce sont des portions de grande sphere. Si on en approche d'assez près, on se voit une face fort large, un nez extrêmement long, de grands yeux, les cheveux & la barbe d'une grosseur considérable; le poil follet y paroît comme une grosse barbe: enfin on remarque sur le visage les moindres tâches & des monticules sur la peau qui paroît sans miroir la plus unie. Si on s'éloigne du miroir à une certaine distance, on s'y voit renversé. Si on se met à une autre distance, & qu'on avance la main ou une épée nue, on apperçoit l'image de la main ou celle de l'épée entre soi & le miroir: il semble qu'on se touche les doigts, & que l'épée même avance vers l'œil, quand on la porte vers le miroir. Un flambeau, présenté derrière la personne qui regarde le miroir,

paraîtra lui venir brûler le visage. Peut-être y auroit-il quelque plaisir à voir les figures d'un singe , à qui on présenteroit un miroir concave , & qui verroit sa patte & son image au dehors.

## V I I I.

Quand on place l'œil au centre du miroir concave , on ne voit qu'un grand œil représenté près de la surface du miroir. Si le miroir dont on se sert est une portion d'une petite sphere , on s'y voit d'une figure monstrueuse , avec deux nez , trois yeux , deux bouches , quelquefois avec des yeux qui n'ont qu'une seule paupiere , entre deux nez. On peut examiner ce qui arriyeroit , si on enchâssoit un miroir concave entre deux miroirs plats , &c.

## I X.

Si le verre du miroir est teint de quelque couleur , il la communique à celui qui se regarde ; en sorte qu'on se voit pâle , cendré , livide , &c. suivant les couleurs qu'on a donné à la glace du miroir.

Voyez les remarq. du prob. XLII.

## X.

Il seroit difficile de rapporter toutes les différentes situations où l'on peut placer le miroir , pour y représenter des figures surprenantes. Je me contenterai de rapporter celle-ci , qui est de placer un miroir fait d'une portion de grande sphere au haut du plancher : on s'y verra comme pendu en l'air hors du miroir ; la tête paroîtra en haut &c. les pieds en bas , dans la même situation qu'un pendu.

## PROBLEME XXV.

*Construire une chambre optique , où l'on voit les objets plus grands que la boîte.*

Pl. 23.  
fig. 11. **F**aites une boîte quarrée ABCDEFG, convenable pour le miroir concave, dont vous voulez vous servir : il faut que le centre du miroir tombe hors de la boîte, c'est-à-dire, qu'il faut que la largeur AD de la boîte soit plus petite que le rayon de la sphere dont le miroir est une portion. Couvrez le dessus de la boîte d'un parchemin transparent, comme celui qu'on a décrit au problème XVIII, ou d'un verre bruni & non poli.\* Appliquez à la face intérieure ABG un miroir concave ; on doit préférer une portion de grande sphere : placez à la face intérieure opposée DEFC, quelque image peinte, comme celle d'un homme, d'un bâtiment, &c. ménagez au haut de cette même face en IH une ouverture en long, que vous garnirez d'un verre poli. Lorsqu'on regardera par cette ouverture, on verra la peinture beaucoup plus grande que la boîte.

## PROBLEME XXVI.

*Faire le moule d'un miroir concave sphérique.*

1°. **A**yant pris de la boue desséchée, & l'ayant réduite en poudre, passez-la au tamis pour en ôter le gravier & les autres ordures.

2°. Détrempez cette poudre tamisée dans de

\* On brunira ce verre, en le frottant sur une surface plane avec du menu sable broyé.



l'eau , & étant réduite en bouillie , passez-la par un bluteau , ou tamis.

3°. Prenez de la fiente de cheval & de la bourre ; mêlez-la avec cette masse jusqu'à ce que ce composé ne fasse plus qu'un corps d'une certaine consistance. On y peut joindre du poussier ou de la brique bien pilée & passée au crible.

4°. Avec de la pierre que l'on trouve dans les sablonnières , faites deux moules grossièrement ébauchés , dont l'un sera convexe & l'autre concave ; puis frottez l'un dans l'autre , jusqu'à ce qu'ils s'emboîtent bien ensemble ; & pour y réussir plus aisément , vous aurez soin de mettre entre ces deux moules , du sable mouillé , qu'il est bon d'avoir passé auparavant au crible , afin qu'il n'y reste point de gravier , ni de petites pierres , qui pourroient gâter la surface des moules.

5°. Servez-vous d'un rouleau de bois pour étendre sur une table ce lut ou cette masse ci-devant préparée , jusqu'à ce qu'elle ait l'épaisseur que vous voulez donner au miroir sphérique. Ce lut étant ainsi étendu , vous le soupoudrez de poudre de briques pilées , afin qu'il ne s'attache point au moule convexe , dont vous lui ferez prendre la figure , en le mettant dans ce moule.

6°. Après qu'il sera sec , vous le frotterez de quelque graisse , & le remplirez d'un couvercle fait de la même matière , c'est-à-dire , du même lut.

7°. Ce couvercle étant sec , vous ôterez le lut qui a la figure du miroir , & qui occupe la place qui est entre le moule de pierre & le couvercle , puis vous frotterez le dedans du moule de pierre d'une composition faite avec de la craie & du lait , & vous mettrez le couvercle dessus.

8°. Mais pour empêcher que ce couvercle ne

tombe au fond du moule de pierre , vous y ferez un rebord , qui s'appuiera sur le bord du moule de pierre , de manière qu'étant posé dans le moule de pierre il y occupe la même place qu'il occupoit lorsque le moule du miroir y étoit.

9°. Enfin vous garnirez de fil de fer le dehors du moule de pierre , & vous ménagerez au rebord deux trous , afin que quand on versera la matiere du métal par l'un , l'air enfermé entre ces moules, puisse sortir par l'autre.

### P R O B L E M E XXVII

*Faire la composition que l'on emploie aux miroirs de métal.*

**P**renez huit parties d'un cuivre qui n'ait point encore servi , deux parties d'étain d'Angleterre , & cinq parties de marcassite ; faites-les fondre ensemble : puis vous prendrez au bout d'un fer chaud un peu de cette matiere fondue : si étant refroidie elle est trop rouge , vous y mettrez un peu d'étain ; mais si elle est trop blanche , vous y ajouterez un peu de cuivre , jusqu'à ce que la couleur soit convenable ; enfin vous verserez cette matiere fondue dans le moule préparé au problème précédent.

### R E M A R Q U E.

On peut encore faire une autre composition avec dix parties de cuivre , quatre parties d'étain d'Angleterre , quelque peu d'antimoine & de sel ammoniac ; on remue cette matiere fondue avec une baguette ou spatule , jusqu'à ce qu'il en sorte une vapeur , qu'il faut bien prendre garde de respirer , parce que c'est un poison.

## PROBLEME XXVIII.

*Polir les miroirs de métal.*

**V**ous ajusterez avec de la poix noire une molette ou poignée de bois au miroir de métal, & vous le frotterez sur le moule rond de pierre, dont on a parlé au problème XXVI, en y mettant d'abord du sable ou grès broyé & mouillé. Quand le miroir sera bien frotté, vous n'emploierez plus de grès; cependant vous frotterez jusqu'à ce que vous le voyiez propre à être poli. Alors vous laisserez sécher le moule rond de pierre, & quand il sera sec, vous l'envelopperez d'un papier blanc, sur lequel vous mettrez du tripoli & de la potée d'étain : vous frotterez le miroir jusqu'à ce qu'il soit bien poli.

*R E M A R Q U E .*

On polit de la même manière les miroirs de verre; mais il faut les froter dans le moule creux.

*Du sable ou grès.*

Le sable ou grès dont on a parlé dans les problèmes précédens, & dont on se sert principalement pour travailler le verre & le polir, est fait avec des morceaux de meules à aiguiser. On les broie pour les réduire en poudre : on doit avoir trois ou quatre sortes de cette poudre, qui auront chacune leur degré de force, pour les employer selon la qualité de l'ouvrage qu'on veut faire. On les sépare fort commodément de cette sorte : on met tout le gros broyé dans un grand vaisseau plein d'eau, que l'on remue beaucoup

pendant quelque tems : on le laisse un peu reposer ; pendant ce tems tout le plus gros va au fond. Alors inclinant promptement ce vaisseau , on verse toute l'eau encore trouble dans un autre : on laisse aussi reposer cette seconde eau un peu de tems , puis on verse cette eau dans un troisième vaisseau , & ainsi de suite : de cette maniere on a le grès qui se trouve au fond des vaisseaux dont on a versé l'eau , & ces différens grès ont des degrés de force différens , suivant le nombre des vaisseaux où l'on a reçu ces eaux troubles , qu'on a laissé reposer. On conserve ces diverses sortes de grès dans des vaisseaux séparés.

### *Du tripoli.*

Le tripoli est une pierre ou espèce de terre ; le meilleur est celui qui vient d'Allemagne , & celui qu'on tire d'une montagne près de Rennes en Bretagne : mais le tripoli qu'on apporte d'Auvergne n'est pas si estimé : de quelque endroit qu'il vienne , il faut choisir le plus léger. On peut employer le tripoli tel qu'on le tire de la terre sans autre préparation , lorsqu'il a de bonnes qualités.

La seconde maniere de préparer le tripoli , est de le broyer en le détremant avec de l'eau-de-vie , ou à son défaut avec du vin blanc , & d'en mettre une certaine quantité dans un vaisseau de verre bien bouché. Quand ce tripoli aura resté quatre ou cinq mois dans ce vaisseau , il sera fort adouci : on en prendra ce qu'on jugera à propos pour en faire de petites masses , qu'on laissera sécher à l'ombre. On s'en sert à sec , quoiqu'on puisse aussi l'employer tel qu'on le retire du vaisseau où il aura été gardé.

**La troisieme maniere de préparer le tripoli sert à l'adoucir extrêmement , & à augmenter sa qualité deterfive. On emplit de tripoli deux creusets , que l'on met l'un sur l'autre , on les lute bien , tant à leur jointure que tout à l'entour ; ensuite on laisse sécher le lut à l'ombre , afin qu'il ne se fende point. On met ces creusets dans un four de boulanger , où les ayant enterré dans la braise , on les laisse au moins pendant deux jours. C'est un excellent tripoli , qui peut être employé sec ou détrempé.**

*De la potée d'étain.*

**Il y a deux sortes de potée d'étain , l'une qui est blanche & l'autre qui est grise. Celle-ci se fait avec des ratures d'étain qu'on jette dans l'eau forte , où elle se précipite , & se résout en une poussiere grisâtre & très-subtile , mais cependant plus grossiere que la blanche.**

**La potée blanche se fait de cette maniere. On met de l'étain fin d'Angleterre dans un pot de terre qui puisse résister au feu : on couvre ce pot , & on le lute avec de la terre de potier bien corroyée & mêlée avec de la bourre. On laisse sécher ce lut , puis on met le pot dans un four de potier de terre , avec les autres vaisseaux ; on l'y laisse jusqu'à ce qu'il soit refroidi de lui-même. Cela étant fait , on trouve dans le pot une potée très-blanche , qui n'est que l'étain parfaitement calciné. Voyez la dioptrique oculaire du pere Cherubin d'Orleans , pag. 353 , 354.**



*Des spheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du soleil.*

**O**N peut encore produire du feu aux rayons du soleil avec une sphere de verre de cristal, ou de quelque autre matiere qui puisse facilement être pénétrée par la lumiere, comme avec de l'eau renfermée dans une bouteille bien ronde, ou avec une sphere de glace. Ce feu n'est pas produit par réflexion, mais par réfraction, qui peut aussi assembler en un point plusieurs rayons de lumiere paralleles entre eux. Ces rayons entrant dans la sphere, se brisent en s'approchant de la perpendiculaire, & en sortant de la sphere ils se brisent de nouveau en s'ecartant de la perpendiculaire. Ce qui les fait approcher du diametre de la sphere qu'ils rencontrent en dehors dans un point qui est le foyer: mais l'effet n'est pas si prompt, ni si vigoureux que dans un miroir ardent.

### P R O B L E M E XXIX.

*Trouver le foyer d'une sphere ou boule de verre.*

Pl. 24.  
fig. 73.

**S**Oit BCD une sphere ou boule de verre, dont le centre soit F, & CD un diametre. Soit un rayon de lumiere ou d'incidence AB, qui rencontrant la surface de la boule de verre en B, la pénètre, & entre dedans: mais au lieu de continuer selon la ligne droite ABH, comme il arriveroit, s'il ne rencontroit aucune résistance, il se brise en ce point B, lequel à cause de cela est appellé point de réfraction, & en s'approchant de la perpendiculaire GBF vers le centre F, il

continue selon la ligne BI. Cette ligne BI étant prolongée, rencontre le diamètre CD, aussi prolongé au point E, qui seroit le foyer, si le rayon brisé BI ne se brisoit de nouveau au point I, par la ligne IO, qui, en s'écartant de sa perpendiculaire IL, va rencontrer le diamètre CD au point O, qui est le foyer.

Pl. 241  
fig. 73.

Avant que d'enseigner à trouver ce foyer O, ou la distance DO à la surface de la boule de verre, nous expliquerons ici quelques termes & quelques propriétés des angles brisés & des angles de réfraction dans le verre, qui ne sont pas les mêmes dans les autres corps diaphanes, comme l'expérience le fait connoître.

Si la ligne AB est un *rayon d'incidence*, la droite BI s'appelle *rayon de réfraction*, & l'angle HBI se nomme *angle de réfraction*. La droite BG, qui est perpendiculaire à la surface de la boule, s'appelle *axe d'incidence*. La ligne BF, qui passe par le centre, & qui n'est que la ligne BG prolongée, se nomme *axe de réfraction*.

Le plan qu'on imagine par le rayon d'incidence AB, & par le rayon de réfraction BI, s'appelle *plan de réfraction* : il est toujours perpendiculaire à la surface de la boule qu'on nomme *surface rompane*, parce que le rayon d'incidence se brise au point où il rencontre cette surface. Il est évident que le plan de réfraction passe par les axes d'incidence & de réfraction, & qu'il contient l'angle de réfraction, HBI, l'angle IBF, qu'on appelle *angle brisé*, & l'angle ABG, qui se nomme *angle d'inclinaison*, lequel est toujours égal au complément de l'angle d'incidence ABP.

L'angle brisé croît ou décroît à mesure que l'angle d'inclinaison est plus grand ou plus petit ;

Pl. 14,  
fig. 73

de sorte que quand l'un de ces deux angles est nul, l'autre angle est aussi nul. Comme si la perpendiculaire BG est un rayon d'incidence, l'angle d'inclinaison sera nul ; ce rayon d'incidence GB en pénétrant le verre, ne se brisera point, mais continuera en ligne droite vers le centre F, ce qui fait que l'angle brisé est aussi nul. Ainsi vous voyez que lorsque le rayon d'incidence est perpendiculaire à la surface rompanse, il ne se fait aucune réfraction, parce qu'il n'y a aucune raison pour laquelle cette réfraction se doive faire plutôt d'un côté que d'un autre.

Quoique l'angle brisé croisse à mesure que l'angle d'inclinaison augmente, néanmoins il ne croît pas de la même façon, c'est-à-dire, que si l'angle d'inclinaison augmente par exemple d'un degré, l'angle brisé n'augmentera pas aussi d'un degré. Mais cette augmentation est telle, que les sinus des angles d'inclinaison dans un même milieu sont proportionnels aux sinus de leurs angles brisés dans un autre milieu plus facile ou plus difficile à pénétrer : de sorte que le sinus d'un angle d'inclinaison est au sinus de son angle brisé, comme le sinus d'un autre angle d'inclinaison est au sinus de son angle brisé. C'est pourquoi si l'on a une fois connu par expérience un angle brisé, pour quelque angle d'inclinaison que ce soit, il sera facile de connoître par supputation les angles brisés pour tous les autres angles d'inclinaison.

Parce que les deux lignes AH, CD, sont parallèles, l'angle E est égal à l'angle de réfraction HBE : & parce que dans tout triangle rectiligne les sinus des angles sont proportionnels à leurs côtés opposés, on connoît que le sinus de l'angle brisé EBE, est à son côté opposé EF, comme



le sinus de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, au rayon de réfraction BE. Et comme on a reconnu par expérience, que lorsque la boule BCD est de verre, le sinus de l'angle brisé EBF est au sinus de l'angle d'inclinaison ABG, ou BFC, comme 2 est à 3, il s'ensuit que si la ligne EF est de 200 parties, le rayon de réfraction BE en doit contenir 300. Ainsi on peut facilement trouver, par la trigonométrie, l'angle E, ou l'angle de réfraction HBE, l'angle brisé EBF, & le demi-diametre BF, lorsque l'on connoît l'angle d'inclinaison ABG, ou son égal BFC, dans le triangle obliquangle BEF, où trois choses sont connues; sçavoir, le côté BE de 300 parties, le côté EF de 200, & l'angle BFE, qui est le reste, à 180 degrés de l'angle BFC, qui est égal à l'angle d'inclinaison ABG, que l'on suppose connu.

Supposons que l'angle d'inclinaison ABG soit de 10 degrés, auquel cas l'angle BFE sera de 170 degrés, & qu'on veuille trouver l'angle brisé EBF, on fera cette analogie,

|  |       |
|--|-------|
| <i>Comme le côté BE</i>                | 300   |
| <i>Au sinus de l'angle opposé BFE.</i> | 17365 |
| <i>Ainsi le côté EF</i>                | 200   |
| <i>Au sinus de l'angle brisé EBF.</i>  | 11577 |

qui se trouvera d'environ 6°, 39', & qui étant ôté de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaison ABG, que nous avons supposé de 10 degrés, donnera 3°, 31', pour l'angle de réfraction HBE, ou pour l'angle E, qui servira à trouver le demi-diametre BF, par cette analogie.

Pl. 24,  
fig. 73.

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| Comme le sinus de l'angle BFE | 17365 |
| A son côté opposé BE          | 300   |
| Ainsi le sinus de l'angle E   | 5843  |
| A son côté opposé BE          | 101   |

Mais si le demi-diametre BF est déjà connu, comme s'il avoit 100 parties, on trouvera dans les mêmes parties la ligne EF, en faisant dans le même triangle BEF, cette analogie,

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| Comme le demi-diametre BF      | 101 |
| A la ligne EF                  | 200 |
| Ainsi le même demi-diametre BF | 100 |
| A la même ligne EF             | 198 |

à laquelle ajoutant le demi-diametre FC, 100, on aura 298 pour la ligne CF.

C'est de cette maniere qu'on a supputé la table suivante, où l'on trouve vis-à-vis de l'angle d'in-

| ABG | EBF   | HBE   | CE  | ABG | EBF    | HBE   | CE  |
|-----|-------|-------|-----|-----|--------|-------|-----|
| 1   | 0. 40 | 0. 20 | 300 | 11  | 7. 18  | 3. 42 | 297 |
| 2   | 1. 20 | 0. 40 | 300 | 12  | 7. 58  | 4. 22 | 297 |
| 3   | 2. 01 | 1. 00 | 300 | 13  | 8. 38  | 4. 22 | 297 |
| 4   | 2. 40 | 1. 20 | 300 | 14  | 9. 16  | 4. 44 | 296 |
| 5   | 3. 20 | 1. 40 | 300 | 15  | 9. 56  | 5. 42 | 295 |
| 6   | 4. 00 | 2. 00 | 299 | 16  | 10. 35 | 5. 25 | 295 |
| 7   | 4. 40 | 2. 20 | 299 | 17  | 11. 14 | 5. 46 | 294 |
| 8   | 5. 19 | 2. 41 | 298 | 18  | 11. 53 | 6. 7  | 293 |
| 9   | 5. 59 | 3. 1  | 298 | 19  | 12. 32 | 6. 28 | 292 |
| 10  | 6. 39 | 3. 21 | 298 | 20  | 13. 11 | 6. 49 | 292 |

clinaison ABG, la quantité de l'angle brisé EBF,  
&c

& de l'angle de réfraction HBE, avec celle de la ligne CE; le diamètre CD de la sphere de verre étant supposé de 200 parties. Pl. 24,  
fig. 73.

Nous n'avons pas prolongé cette table au-delà du vingtieme degré d'inclinaison, parce qu'elle suffit pour faire voir en quelle proportion la ligne CE décroît, car elle décroît fort lentement, étant par-tout à peu près égale à trois demi-diametres, puisque la plus grande différence n'est qu'environ de la vingt-cinquieme partie du diamètre; ce qui fait que la ligne DE est presque égale au demi-diamètre de la même sphere, c'est-à-dire, la ligne DF.

Cette ligne DE, qui se trouve de 92 parties pour un angle d'inclinaison de 20 degrés, comme on le connoît en ôtant CD de CE, ou 200 de 292, servira à trouver le foyer O. Mais il faut remarquer auparavant que l'angle brisé EBF est presque double de l'angle de réfraction HBE, & que cet angle de réfraction HBE est à peu près égal à la troisieme partie de l'angle d'inclinaison ABG, comme on le voit sans peine dans la table précédente.

Pour trouver le foyer O, on considérera que puisque les lignes DE, DF, sont presque égales, les angles IEF, IFE étant à peu près égaux, ce qui fait que l'angle EIL qui leur est égal, est presque double de chacun, & par conséquent de l'angle E. Cela étant supposé; si on considere la ligne Ol comme un rayon d'incidence, en sorte que l'angle OIL soit un angle d'inclinaison, alors la ligne IB sera un rayon de réfraction, l'angle OIE sera un angle de réfraction, & l'angle EIL un angle brisé. On connoitra aussi que cet angle brisé EIL est double de l'angle de réfraction EIO, comme nous avons remarqué auparavant.

Pl. 24,  
fig. 73.

D'où il suit que les deux angles  $E$ ,  $EIO$ , sont égaux entre eux, & que par conséquent les lignes  $OE$ ,  $EI$ , sont aussi égales entre elles. Et parce que la ligne  $OI$  est presque égale à la ligne  $OD$ , la ligne  $OE$  sera aussi presque égale à la ligne  $OD$ . Ainsi le foyer  $O$  est à peu près au milieu de la ligne  $DE$ , & par conséquent la ligne  $DO$  est égale à la moitié de la ligne  $DE$ , ou du demi-diamètre  $DF$ . Si donc on prend sur le diamètre prolongé la ligne  $DO$  égale à la moitié du demi-diamètre  $DF$ , ou au quart du diamètre  $CD$ , on aura en  $O$  le foyer qu'on cherche.

## R E M A R Q U E.

L'angle  $EBF$ , qui est un angle brisé à l'égard du rayon d'incidence  $AB$ , qui sortant de l'air pour entrer dans le verre, se brise par la ligne  $BE$ , qui est un rayon de réfraction, devient un angle d'inclinaison à l'égard du rayon d'incidence  $IB$ , qui sortant du verre pour entrer dans l'air, se brise réciproquement par la ligne  $AB$ , qui sera un rayon de réfraction. Et comme cet angle  $EBF$  est double de l'angle de réfraction  $HBE$ , on voit que lorsqu'un rayon d'incidence sort du verre pour entrer dans l'air, l'angle d'inclinaison est double de l'angle de réfraction; ce qu'il est bon de remarquer, parce que cela nous servira pour le problème suivant.



*Des lentilles de verre , propres à produire du feu aux rayons du soleil.*

**L**Es lentilles de verre qui servent à produire du feu , étant exposées directement aux rayons du soleil , peuvent être plates d'un côté & convexes de l'autre , comme un segment de sphère ; ou bien convexes des deux côtés , comme les lunettes des vieillards , & les microscopes qui grossissent extraordinairement les objets , & servent à découvrir les moindres parties & les plus petits corps de la nature ; ou bien convexes d'un côté & concaves de l'autre : celles-ci ne sont pas si utiles que les autres , parce qu'elles ne peuvent servir à produire du feu que quand leur convexité est tournée directement au soleil ; car lorsque leur concavité regarde le soleil , les rayons de réfraction au lieu d'être convergens deviennent divergens , c'est-à-dire , qu'ils s'écartent les uns des autres ; ce qui les empêche de s'unir , & de produire du feu , comme nous ferons voir dans la suite.

### PROBLEME XXX

*Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & planes de l'autre , faites en forme de segment de sphere.*

I.

**E**Xposons premierement au soleil la surface plane FC de la lentille de verre IBC , dont la convexité FBC a son centre E dans l'axe d'incidence EBH , qui divise l'arc FBC en deux également au point B , & la corde FC aussi en deux également au point I. C'est aussi dans cet axe EH

Pl. 24 ,  
fig. 74

Pl. 24 , que se trouve le foyer H de tous les rayons d'inci-  
 68.74. dence qui lui sont parallèles , & par conséquent  
 perpendiculaires à la surface plane FC. Ce foyer  
 H , ou sa distance BH depuis la convexité du mi-  
 roir , se déterminera en cette sorte.

Soit un rayon d'incidence DA , lequel étant pa-  
 rallèle à l'axe d'incidence EH , tombera sur la sur-  
 face plane FC à angles droits , & la traversera par  
 conséquent sans se briser ; mais étant parvenu au  
 point A de la surface convexe , il se brisera en sor-  
 tant du verre ; & au lieu d'aller droit en G , il se  
 détournera par le rayon de réfraction AH , qui  
 coupera l'axe d'incidence EH au point H , où tous  
 les autres rayons d'incidence , parallèles au rayon  
 DA , s'uniront par réfraction , pourvu néanmoins  
 que l'arc BC ou BF ne soit pas plus grand que 20  
 degrés ; car les rayons de réfraction ne s'uniroient  
 pas au même point H , mais plus près du point B ,  
 si ces arcs étoient plus grands que 20 degrés , com-  
 me on l'a vu dans le problème précédent. Ainsi le  
 point H sera le foyer ; parce que c'est le lieu où  
 les rayons du soleil s'unissant par réfraction , peu-  
 vent produire du feu.

Cela étant supposé , on considérera que l'angle  
 d'inclinaison DAE , ou son égal AEH , étant dou-  
 ble de l'angle de réfraction GAH , ou AHE son  
 égal , comme nous avons vu au problème précé-  
 dent , le sinus de l'angle AEH sera presque dou-  
 ble du sinus de l'angle AHE , à cause de la peti-  
 tesse de ces angles. Mais parce que dans un trian-  
 gle rectiligne les côtés sont proportionnels aux  
 sinus de leurs angles opposés , le côté AH sera  
 aussi presque double du côté AE ; & comme le côté  
 AH approche d'être égal à la ligne BH , il s'ensuit  
 que la distance BH du foyer H à la surface convexe

$FBC$  est presque double du demi-diametre  $AE$  ; ou  $BE$  , & que par conséquent toute la distance  $EH$  est à peu près triple de ce demi-diametre.

## II.

Mais si l'on tourne la partie convexe  $FBC$  vers le soleil, le rayon  $DA$  , & tous les autres parallèles à l'axe d'incidence  $EB$  , se briseront deux fois avant que de s'unir au point  $K$  , qui sera le foyer ; une fois en entrant dans le verre par la ligne  $AH$  , qui s'approche de la perpendiculaire  $EO$  ; & une seconde fois en sortant du verre par la ligne  $LK$  , qui s'écarte de la perpendiculaire  $LM$  .

Pl. 24.  
fig. 75.

Il est évident , par ce qui a été dit au problème précédent , que dans la premiere réfraction l'angle d'inclinaison  $DAO$  , ou  $AEB$  , est triple de l'angle de réfraction  $GAH$  , ou  $AHE$  , & que par conséquent la ligne  $AH$  est triple du demi-diametre  $EA$  . Mais parce que la ligne  $AH$  est presque égale à la ligne  $BH$  , cette ligne  $BH$  sera aussi presque triple du même demi-diametre  $AE$  , ou  $BE$  , comme auparavant ; ce qui fait connoître que le foyer seroit en  $H$  , s'il n'y avoit qu'une réfraction ; mais comme il y en a deux :

Il est évident aussi par la remarque du problème précédent , que dans la seconde réfraction  $MLM$  , ou  $KHL$  est double de l'angle de réfraction  $KLM$  , par conséquent la ligne  $KL$  est double de la ligne  $KH$  . Et parce que la ligne  $KL$  est presque égale à la ligne  $KB$  , lorsque la lentille  $BI$  est fort mince , comme nous la supposons ici , cette ligne  $KB$  est aussi presque double de la ligne  $KH$  ; par conséquent toute la ligne  $BH$  est à peu près triple de la ligne  $KH$  . Mais nous avons reconnu que la même ligne  $BH$  est aussi triple du

demi-diametre BE; il s'ensuit donc que ce demi-diametre BE est égal à la ligne KH, & par conséquent la ligne KB est double du demi-diametre BE, ou égale à tout le demi-diametre. Si donc on porte le demi-diametre EB depuis le centre E en K, ce point K sera le foyer qu'on cherche.

### P R O B L E M E XXXI.

*Trouver le foyer des lentilles de verre convexes des deux côtés.*

Pl. 24,  
fig. 76.

**P**our trouver le foyer de la lentille de verre ABCD, dont l'axe EI passe par le centre E de la convexité ADC, & par le centre F de la convexité ABC, tirez un rayon quelconque d'incidence GH parallele à l'axe EI, & ayant pris sur cet axe la ligne BI triple du demi-diametre BF, menez la droite HI, qui donnera le point K de la seconde réfraction. Par ce point K tirez du centre E la droite EKM, qui sera perpendiculaire à la surface rompante ADC. La ligne IK étant considérée comme un rayon d'incidence, l'angle IKM fera un angle d'inclinaison, lequel est double de l'angle de réfraction, comme il a été remarqué au problème précédent : si donc on fait en K l'angle IKL égal à la moitié de l'angle IKM, on aura en L le foyer qu'on cherche, à l'égard de la convexité ABC exposée au soleil.

### R E M A R Q U E.

Lorsque les demi-diametres ED, BF, seront égaux entre eux, c'est-à-dire, lorsque les convexités ABC, ADC, seront des portions égales de



la superficie d'une même sphere, le foyer se trouvera à peu près au centre F de la convexité ABC exposée au soleil, ou au centre E de la convexité ADC tournée vers le soleil. Mais soit que les demi-diametres ED, BF, soient égaux ou inégaux, la distance du foyer L sera toujours la même, en tournant vers le soleil celle qu'on voudra des deux convexités ABC, ADC.

## PROBLEME XXXII.

*Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & concaves de l'autre.*

## I.

**L**E foyer d'une semblable lentille se trouve comme dans la précédente, lorsque sa convexité regarde le soleil. Mais il y a une méthode abrégée pour le trouver, quand le diametre de la concavité est triple de celui de la convexité. Alors le foyer se trouve éloigné d'un diametre & demi, ou de trois demi-diametres, de la convexité, que nous supposons tournée vers le soleil, c'est-à-dire, qu'il est au centre de la concavité, en considérant l'épaisseur de la lentille comme très-petite.

Pl. 24,  
fig. 77.

Proposons la lentille de verre ABCD, telle que le demi-diametre EB de la convexité ABC, qui est exposée au soleil, soit la troisieme partie du demi-diametre FD de la concavité ADC. Cela étant, je dis que tous les rayons d'incidence parallèles à l'axe BF, comme GH, s'uniront par réfraction au centre F de la concavité ADC: car ce rayon GH traversant le verre, se brisera par la droite HI, qui étant continuée passeroit par le point F, éloigné de la convexité ABC de trois

demi-diamètres, comme on l'a vu auparavant. Mais ce rayon de réfraction HF, se trouvant perpendiculaire à la surface concave ADC, ne se brisera point en I, lorsqu'il sortira du verre ; il continuera directement vers le point F, lequel par conséquent sera le foyer qu'on cherche.

## I.

Pl. 24,  
fig. 78.

Mais si l'on tourne la concavité vers le soleil, le foyer se trouvera de même que dans les articles précédens. On pourra aussi le trouver par une méthode plus courte, lorsque le demi-diamètre AB de la concavité sera la troisième partie du demi-diamètre CD de la convexité. Dans ce cas, le foyer se trouvera au centre C de la convexité, lorsque l'épaisseur BD de la lentille ne sera pas considérable ; ce qu'il faut toujours supposer, comme on le connoîtra par un raisonnement semblable au précédent. Mais on ne peut tirer aucune utilité d'une telle lentille exposée au soleil, puisque ses rayons de réfraction s'écartent, au lieu de s'unir. Ainsi le point C n'est appelé foyer qu'improprement, parce que les rayons de réfraction ne peuvent pas s'assembler en ce point, qui est du côté du soleil ; mais ils s'écartent par des lignes qui tendent à se réunir en ce point.

## R E M A R Q U E S.

## I.

Ce foyer C, qui ne peut servir à produire du feu, est appelé *foyer virtuel*, pour le distinguer du *foyer véritable*, où les rayons du soleil s'unissant par réfraction, peuvent produire du feu.

On peut trouver ce foyer véritable par cette

analogie , qui suppose que l'épaisseur de la lentille , dont la convexité regarde le soleil, est très-petite.

*Comme la différence des demi-diametres de la concavité & de la convexité ,  
Au demi-diametre de la convexité ;  
Ainsi le diametre de la concavité ,  
A la distance du foyer à la lentille.*

## I I.

Dans une lentille convexe des deux côtés , le foyer, qui est toujours véritable, se peut trouver par cette analogie , qui, comme la précédente, suppose que l'épaisseur de la lentille est très-petite.

*Comme la somme des demi-diametres des deux convexités ,  
Au demi-diametre de l'une des convexités ;  
Ainsi le diametre de l'autre convexité ,  
A la distance du foyer à la lentille.*

## I I I.

Cette analogie servira aussi à trouver le foyer d'une lentille concave des deux côtés ; mais comme ce foyer n'est que virtuel dans cette espece de lentilles , aussi-bien que dans celles qui sont plates d'un côté & concaves de l'autre, nous n'en parlerons pas davantage.

## I V.

Si l'on fait une lentille de verre ABCG , concave d'un côté , & convexe de l'autre, en sorte que la convexité ABC soit la surface d'une portion de sphéroïde produit par la circonvolution

Pl. 24;  
fig. 79.

Pl. 24, de l'ellipse ABCD, autour de son grand axe BD,  
fig. 79. qui soit à la distance EF des deux foyers E, F de l'ellipse, comme 3 est à 2, & dont la concavité AGC ait pour centre le foyer E; en exposant cette lentille aux rayons du soleil, en sorte que sa convexité ABC regarde directement le soleil, tous les rayons d'incidence qui seront parallèles au grand axe BD, s'uniront par réfraction au foyer E, lequel par conséquent sera le foyer véritable de cette lentille sphérico-elliptique. Sa convexité se peut aussi faire hyperbolique; mais cela est trop spéculatif pour des récréations mathématiques. Voyez la dioptrique du Pere Deschales.

## V.

Ce seroit ici le lieu de parler des grands verres ardents de M. Tschirnaus, & principalement de celui que ce gentilhomme Saxon a vendu à M. le duc d'Orléans; mais il trouvera sa place dans les problèmes de physique, où l'on aura encore occasion de parler des lentilles & de leurs effets. On ajoutera cependant quelques effets de ces verres, dont il est fait mention dans les actes des savans, de l'année 1697, page 415 & suivantes. Le bois le plus dur, humecté même d'eau, mis à leur foyer, prend feu en un moment; l'eau bout aussi-tôt qu'elle y est présentée, pourvu qu'elle soit contenue dans un petit vase; les métaux se fondent; les briques, la pierre de ponce, la porcelaine d'Hollande & l'asbeste se changent en verre; le soufre, la colophone, la poix & les autres matières de même nature, se liquéfient en eau; les charbons & les cendres se vitrifient: en un mot, tout ce qu'on présente au foyer de ces verres ardents se fond, ou se change en chaux, ou s'évapore dans l'air.

Comme ces lentilles sont fort grandes, on a soin , pour faire ces expériences , d'ajouter une petite lentille vers le foyer de la grande , afin de rassembler en un espace plus proche les rayons rompus.

### P R O B L E M E XXXIII.

*Représenter dans une chambre fermée les objets de dehors avec leurs couleurs naturelles , par le moyen d'une lentille de verre convexe des deux côtés.*

**A**Yant fermé la porte & les fenêtres de la chambre , en sorte que toutes les avenues soient bouchées à la lumière , excepté un petit trou que l'on fera à une fenêtre qui reponde sur quelque place fréquentée , ou sur quelque beau jardin , si cela se peut ; appliquez à ce trou une lentille de verre convexe des deux côtés , qui ait fort peu d'épaisseur , afin que son foyer soit plus éloigné , comme un verre des lunettes dont se servent les vieillards. Alors les images des objets de dehors , qui passeront au travers de ce verre , étant reçues sur un linge blanc tendu à plomb , ou sur un carton bien blanc placé au foyer du même verre , y paroîtront avec leurs couleurs naturelles , & même plus vives que le naturel , sur-tout lorsque le soleil les éclairera. Il ne faut point que le verre soit exposé au soleil , parce que la trop grande lumière frappant le verre empêcheroit de discerner avec plaisir les images des objets extérieurs , qui sans cela s'y distingueront d'une telle maniere avec leurs mouvemens , que l'on pourra sans peine discerner les hommes d'avec les animaux qui passe-

ront, & même un homme d'avec une femme, remarquer les oiseaux qui voleront en l'air & connoître s'il y a du vent par le tremblement des herbes ou des feuilles des arbres, qui se rendra sensible sur le linge ou sur le carton.

## R E M A R Q U E S.

### I.

On peut aussi sans verre distinguer sur une muraille de la chambre, ou sur le plancher, les images des objets extérieurs, & principalement de ceux qui sont en mouvement; mais ces images ne paroissent pas avec tant d'agrément & de distinction, parce que leurs couleurs ne sont que sombres & mortes. Or de quelque manière qu'on les voie, elles paroîtront toujours renversées; mais on les peut redresser en plusieurs manières: ce qui ne sert pourtant de rien, parce que cela n'augmente pas le plaisir qu'il y a de les voir avec un verre dans leurs couleurs naturelles, & ne diminue en rien l'usage qu'on en tire, qui est que l'on peut représenter en raccourci sur le carton les paysages, & tout ce qui pourra envoyer son image sur ce carton. Ce qui se fera en passant un crayon sur tous les traits de cette représentation, qui paroîtra comme en perspective, dont les parties seront d'autant mieux proportionnées, que la lentille de verre sera moins épaisse par le milieu, & que le trou par où les espèces passent pour entrer dans le verre, sera petit. Ce trou ne doit pas avoir une épaisseur considérable; c'est pourquoi il doit être fait dans une platine de métal bien mince, qu'on appliquera contre le trou de la fenêtre, qu'il est bon de faire un peu grand, afin de don-

ner un passage libre aux especes ou images des objets de dehors , qui seront de côté.

## I I.

On peut aussi voir dans une chambre dont les fenêtres seront fermées , pourvu que la porte soit ouverte , ce qui se passe au dehors par le moyen de plusieurs miroirs plans , qui pourront se communiquer par réflexion les especes l'une à l'autre , &c.

## I I I.

J'ai oublié de dire que , par cette maniere de représenter sur une surface les images des objets avec une lentille de verre , les physiciens expliquent comment se fait la vue , en prenant le creux de l'œil pour la chambre fermée , le fond de l'œil ou la rétine pour la surface qui reçoit les especes , le cristallin pour la lentille de verre , & le trou de la prunelle pour le trou de la fenêtre par où passent les especes ou images des objets.

## I V.

L'œil artificiel représente beaucoup mieux l'œil naturel que cette chambre fermée. On va le décrire tel qu'il se trouve dans les *expériences physiques* \* de M. Poliniere , qui nous a communiqué dans ce livre ses découvertes sur la physique , avec plusieurs autres , qu'il a rendu fort claires , tant par l'exposition des expériences , que par leur explication.

AB est une boule de bois creuse , qu'on peut sé- Pl. 23 ;  
parer en deux parties en DE ; son diametre est fig. 12.  
d'environ 5 à 6 pouces. En BC est un verre len-

\* Page  
472, le-  
conde  
édition.

ticulaire , dont le foyer en est éloigné de 5 pouces ou environ. FA est un tuyau collé à la boule AB en AH : ce tuyau est de 8 à 9 pouces de long, & il a 2 pouces & demi de diamètre. GA est un tuyau qui entre dans l'autre FA , & qui porte à son extrémité AH un papier huilé , ou un verre plan, qui a été un peu dépoli en le frottant sur une surface plane avec du sable broyé. Ce verre est appliqué au bout du tuyau mobile GA , pour être facilement placé au foyer du verre CB.

Si l'œil est placé vers G pour regarder le verre AH , en repoussant un peu , ou en retirant le tuyau G , il appercevra distinctement les objets extérieurs peints sur le verre AH dans une situation renversée.

On voit que dans cet œil artificiel la lentille BC tient la place des humeurs de l'œil , & le verre bruni ou papier huilé AH , celle de la rétine , que l'on croit vraisemblablement transmettre au cerveau les images qui y sont peintes.

## V..

Pour bien voir ces images dans l'œil naturel, il faut séparer un œil de mouton des chairs & peaux dont il est entouré, & couper un peu du fond de cet œil, pour découvrir l'humeur vitrée. Alors y ayant mis un petit morceau de papier huilé, & ayant placé le devant de cet œil à une petite ouverture de fenêtre d'une chambre fermée, l'image des objets éclairés paroît sur ce papier dans une situation renversée. Cet œil étant de même exposé vis-à-vis d'une bougie allumée, l'image de la flamme paroît renversée sur ce papier; les objets proches sont mieux représentés que les objets éloignés.

L'œil de mouton est préférable à celui de bœuf,



ou de veau, parce que la prunelle des moutons ou des brebis ne se ferme pas tant en mourant que celle des bœufs.

### PROBLEME XXXIV.

*Construire une chambre obscure qu'on puisse transporter.*

**F**AITES une caisse de bois ABCD, à laquelle vous donnerez environ 9 pouces de largeur, & 2 ou trois pieds de longueur, plus ou moins, selon la distance des foyers des lentilles dont vous voulez vous servir. Ajustez à l'un des côtés un tuyau EF, ou plusieurs qui s'emboîtant l'un dans l'autre, puissent s'allonger ou se raccourcir, selon le besoin : vous appliquerez dans ce tuyau deux, ou même trois lentilles convexes des deux côtés. Les foyers des lentilles extérieures auront environ 7 pouces de distance, & celui de la lentille intérieure aura environ 5 pouces. Vous attacherez un papier huilé GH, qui sera suspendu perpendiculairement à travers la caisse dans le lieu où l'on jugera que se doivent peindre les images des objets, dont les rayons auront été rompus dans les verres lenticulaires du tuyau. Enfin ménagez au côté opposé au tuyau une ouverture en I, qui soit assez grande pour recevoir les deux yeux. La caisse doit être bien fermée de tous côtés.

Pl. 23,  
fig. 13.

Quand vous voudrez voir quelques objets, vous tournerez le tuyau garni de ses lentilles vers ces objets, & vous les ajusterez de manière que l'image en soit peinte clairement sur le papier huilé. Ce que vous reconnaîtrez en regardant par l'ouverture I. Pour mieux voir, il est bon de s'en-

velopper la tête & l'ouverture, afin qu'il n'y entre point de lumière par cette ouverture. Les objets paroîtront représentés avec toutes leurs couleurs, de même que dans la chambre fermée qu'on a décrite dans le problème précédent.

## R E M A R Q U E S.

### I.

Wolfius rapporte dans sa dioptrique, une autre construction de chambre obscure, pour redresser les images des objets qu'on voit dans une situation renversée. Si l'on veut voir quelque chose de singulier en ce genre, il faut consulter les expériences physiques citées ci-dessus, dans les expériences 101 & 103 de la seconde édition.

### I I.

Mais on augmentera la multiplicité des objets, si on ajuste à la place du premier verre lenticulaire un verre à facettes, pour recevoir les rayons des objets, & qu'on mette à son foyer un autre verre convexe dans le tuyau de la chambre obscure. Ces verres à facettes font une curiosité d'optique dont on parlera dans le problème suivant.

### I I I.

Voici la description d'une autre chambre obscure, inventée par G. J. s'Gravesande, qui l'a donnée à la suite de son essai de perspective.

Pl. 25, Cette machine a la forme à peu près d'une  
fig. 14. chaise à porteur. Le dessus en est arrondi vers le  
derrière, par le devant elle est faite en talus  
jusqu'à la moitié de sa hauteur. Voyez la figure  
re

re qui représente cette machine , dont le côté opposé à la porte est supposé enlevé, pour qu'on en puisse voir le dedans. Pl. 25,  
fig. 14.

1. Au dedans , la planche A sert de table ; elle tourne sur deux chevilles de fer qui entrent dans les bois qui forment le devant de la machine. Cette table est soutenue par deux chainettes ; de sorte qu'on peut la soulever pour entrer plus commodément par la porte qui est de côté.

2. De part & d'autre , il y a vers le derriere de la machine un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la figure 15. Ce tuyau se place dans la garniture qui est au dedans , & il a une de ses extrêmités , qui donne dans la machine , & une qui aboutit au-dehors : il sert à donner de l'air , sans que la lumiere y puisse passer. On peut avoir plusieurs de ces tuyaux , & les ajuster à la chaise , si on en a besoin pour donner plus d'air. Fig. 15.

3. Au derriere de la machine en dehors sont attachés quatre petits fers c , c , c , c , dans lesquels glissent deux regles de bois DE , DE , lesquelles sont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers de ces deux regles , passent vers DD deux lattes qui tiennent attachée une planche F , laquelle par leur moyen on peut faire avancer & reculer. Fig. 14.

4. Au-dessus de la machine , il y a une planche longue d'environ quinze pouces , & large de neuf , dans laquelle il y a une échancrure PMOQ , longue de neuf ou dix pouces , & large de quatre.

5. On attache sur cette planche deux regles faites en forme de queue d'aronde , entre lesquelles on fait glisser une autre planche de même longueur que la premiere , & large d'environ six pouces. Cette seconde planche est percée par le milieu ,

Pl. 25. & dans cette ouverture, qui doit avoir trois pouces  
fig. 14. de diametre, on fait un écrou, qui sert à élever  
& à abaisser un cylindre, sur lequel il y a une vis,  
& dont la hauteur est d'environ quatre pouces.  
C'est dans ce cylindre, comme on le verra dans la  
suite, qu'est placé le verre convexe.

6. On fait glisser au-dessus de la planche dont  
on a parlé N°. 4, une boîte X, en forme de petite  
tour carrée, large d'environ sept ou huit pouces,  
& haute de dix; le côté B, qui lui sert de porte,  
est tourné vers le devant de la machine. Le der-  
riere de cette boîte a vers le bas une ouverture  
carrée N, d'environ quatre pouces, laquelle  
peut se fermer par une petite planche I, qui glisse  
entre deux regles.

7. Au-dessus de cette ouverture carrée il y a  
une fente parallele à l'horison, & qui tient toute  
la largeur de la boîte: par cette fente on fait en-  
trer dans la boîte un petit miroir, qui des deux  
côtés glisse entre deux regles placées de telle ma-  
niere, que la glace du miroir, qui est tournée vers  
la porte B, fait avec l'horison un angle de cent  
douze degrés & demi.

8. Ce miroir, sur le milieu du côté qui reste hors  
de la boîte, a une petite platine de fer qui tient lieu  
de base à une petite vis, laquelle avance & sert à  
arrêter le miroir dans l'endroit où on le voit en H.  
Pour le fixer ainsi, on fait passer la vis dans un  
petit trou qu'on fait dans la planche dont il est  
parlé N°. 5, & par une fente qu'on fait pour cet  
effet dans la planche qui est au-dessous de celle-là,  
& dont on a parlé N°. 4. Ce miroir se tourne ver-  
ticalement de tous côtés, & on l'arrête par le  
moyen d'un écrou R. Quand on ôte le miroir  
de cette situation, la fente dont on vient de par-

ler, se ferme par une petite planche, qui au dedans de la machine glisse entre deux petites regles. Quant à la fente dont il est parlé N°. 7, elle se ferme en partie par la planche I, quand on ouvre l'ouverture N, & les deux bouts, qui restent ouverts, se ferment par de petites regles.

9. A un des côtés de la boîte, on fait glisser une regle dans deux petits fers, pareils à ceux qui sont au derriere de la machine N°. 3. Cette regle passe de quelques pouces le derriere de la boîte, & à son extrémité elle a un trou par où l'on fait passer la vis du miroir dont je viens de parler; de sorte qu'on peut incliner ce miroir sous toutes sortes d'angles au devant de l'ouverture N.

10. Outre ce premier miroir, il y en a un autre marqué L, qui est plus petit: il est attaché vers son milieu à une latte qui passe par le milieu du haut de la boîte. Cette latte peut s'arrêter à vis, & elle sert à élever & à abaisser le miroir qui lui est attaché de maniere à pouvoir être fixé à toutes sortes d'inclinaisons.

### R E M A R Q U E.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il est parlé N°. 2, ne suffisent point pour donner de l'air à la machine, pourront mettre sous le siege un petit soufflet, qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette maniere on renouvellera continuellement l'air de la machine, le soufflet chassant celui qui y est, & obligeant ainsi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

*Usages de la machine qu'on vient de décrire.*

## I.

*Représenter les objets dans leur situation naturelle.*

Pl. 25. **Q**Uand on veut représenter les objets dans  
fig. 14. cette machine on étend un papier sur la table;  
ou bien, ce qui est mieux, on étend le papier sur  
une autre planche, en sorte qu'il déborde, & on  
insère cette planche ainsi couverte dans un cadre,  
de manière qu'elle soit fixée par le moyen de deux  
regles faites en forme de queue d'aronde.

On met dans le cylindre C, qui tourne à vis dans  
le haut de la machine, un verre convexe, dont le  
foyer est à une distance à peu près égale à la hau-  
teur de la machine au-dessus de la table : on ouvre  
par derrière la boîte qui est au-dessus de la machine,  
& on incline vers cette ouverture le miroir L; en  
sorte qu'il fasse avec l'horison un angle demi-droit,  
quand on veut représenter les objets pour le tableau  
perpendiculaire. Alors si on ôte le miroir H, & la  
planche F, aussi-bien que les règles DE, DE; on  
verra se placer sur le papier tous les objets qui en-  
voyent sur le miroir L des rayons qui peuvent  
être réfléchis sur le verre convexe, lequel on élève  
ou l'on abaisse par le moyen de la vis du cilin-  
dre, jusqu'à ce que les objets paroissent entière-  
ment distincts.

Quand on veut représenter ces mêmes objets  
pour le tableau incliné, on doit donner au miroir  
la moitié de l'inclinaison qu'on veut donner au  
tableau.

Pour le tableau parallèle, il faut fermer l'ouver-  
ture N, & ouvrir la porte B : après quoi il faut

élever le miroir L jusqu'au haut de la boîte, en le mettant dans une situation parallèle à l'horison. Cette disposition de la machine peut servir quand on est sur un balcon, ou à quelque étage élevé, à dessiner un parterre qui seroit au bas.

Si on vouloit dessiner une statue qui seroit dans un lieu un peu élevé, & qu'on voulût la représenter de la maniere qu'il faudroit la peindre contre un plafond, il faudroit tourner le derriere de la machine vers la statue, & tourner aussi la boîte en sorte que la porte B regardât la statue. Alors après avoir ouvert la porte, il faudroit mettre le miroir L verticalement, la glace tournée vers la statue, & avancer ou reculer la boîte, ou bien élever ou abaisser le miroir, jusqu'à ce que les rayons qui viennent de la statue sur le miroir, puissent être réfléchis sur le verre. Quand ces changemens de la boîte ou du miroir ne suffissent pas pour donner cette réflexion sur le verre, il faut avancer ou reculer la machine entiere.

## II.

*Représenter les objets en faisant paroître à droite ce qui doit être à gauche.*

**A**Yant mis la boîte X dans la situation qu'on voit dans la figure, il faut ouvrir la porte B, & fermer l'ouverture N; puis mettant le miroir H dans la disposition qui a été dite, N°. 7, élevez le miroir L vers le haut de la boîte, & inclinez le vers le premier miroir, en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle de 22 degrés & demi; c'est-à-dire, que le dessus de la machine, après une double réflexion, paroisse vertical dans le premier miroir.

Pl. 25,  
fig. 14.

Pour le tableau incliné, il faut que le miroir L fasse avec l'horison un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaison du tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec assez de précision pour la pratique, en inclinant le miroir L jusqu'à ce que l'apparence du dessus de la machine, après une double réflexion, paroisse dans l'autre miroir sous un angle avec l'horison, égale à l'inclinaison qu'on veut donner au tableau. Si l'inclinaison du tableau étoit moindre que du quart de 90 degrés, il ne faudroit pas incliner le miroir L vers le premier; comme il vient d'être dit ci-dessus, mais du côté opposé, en faisant l'angle de l'inclinaison du miroir égal à la différence de l'angle de l'inclinaison du tableau, au quart de 90 degrés.

Quand on veut représenter les objets pour le tableau parallèle, il faut mettre le miroir L dans la disposition qui a été dite, article I, de l'usage, & le miroir H dans celle qui a été dite au N°. 9, en l'inclinant vers l'horison sous un angle demi-droit la glace tournée vers la terre, quand on suppose le tableau au-dessous de l'œil, & vers le ciel, quand on le suppose au-dessus.

Cette disposition de la machine peut aussi être d'usage pour les tableaux inclinés, qui font avec l'horison un angle fort petit: mais alors il faut diminuer l'inclinaison d'un des miroirs, de la moitié de l'inclinaison du tableau.





*Représenter tour à tour les objets qui sont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, au milieu duquel on a placé la machine, & faire paroître ces objets redressés devant celui qui est assis dans la machine.*

**I**L faut tourner le dos de la machine vers le soleil, parce que les objets qui sont derrière la machine, se représentant par une seule réflexion, leur apparence sera toujours plus claire, bien qu'ils soient dans l'ombre, que celle des objets placés aux autres côtés, & qui ne peuvent être vus que par une double réflexion.

Les objets qui sont aux deux côtés de la machine, se représentent par le moyen du miroir H, situé comme on le voit dans la figure N, & 8. On couvre ce miroir d'une tour ou boîte de carton, ouverte du côté des objets, comme aussi du côté de l'ouverture N de la boîte X : on doit user de cette précaution ; car si on laisse le miroir entièrement exposé, il réfléchira sur le miroir L les rayons de lumière qui viennent de côté, lesquels entrant par le verre convexe, après avoir été réfléchis par le miroir L, affoibliront extrêmement la représentation.

Les objets qui sont au-devant de la machine, se représentent comme il a été dit au commencement de l'article II.

## I V.

*Représenter des tableaux ou des tailles-douces.*

**L**Es tableaux & les tailles-douces qu'on veut représenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derrière de la machine.

Pl. 25, que l'on tourne en sorte que ces tailles-douces  
fig. 14. soient exposées au soleil. Dans cette situation on les représente comme les autres objets (art. I.) avec cette seule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui est dans le cylindre C : car si on se propose de donner aux tailles-douces leur véritable grandeur ; il faut que la distance du foyer à ce verre soit égale à la moitié de la hauteur de la machine au-dessus de la table, c'est-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit dans le dessein donner à ces mêmes figures plus de grandeur qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la distance du foyer à son verre fût encore plus petite ; & il faudroit au contraire qu'elle fût plus grande, si on vouloit représenter les figures plus petites qu'elles ne sont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les tailles-douces, se trouve en avançant ou en reculant la planche F, jusqu'à ce qu'elles paroissent distinctement dans la machine. On peut déterminer cet éloignement par la proposition suivante.

*La hauteur de la machine au-dessus de la table ,  
moins la distance du foyer au verre est à  
La hauteur de la machine au-dessus de la table ,  
comme la distance du foyer au verre , est à  
La distance du verre à la figure.*

Remarquez que cette distance du verre à la figure, se mesure par un rayon réfléchi, qui part de la figure parallèlement à l'horison, & qui est réfléchi par le miroir perpendiculairement sur le verre. Remarquez encore que quand on veut éloigner les figures au-delà du derrière de la machine, il faut les attacher contre le côté F de la planche, & la tourner en faisant passer ses lattes par les regles

DE, DE, de maniere que la face F regarde l'ouverture N.

**R E M A R Q U E I.**

*Sur la représentation des visages.*

Il seroit assurément très-curieux & très-utile de pouvoir dessiner les visages des hommes au naturel. La chose réussit fort bien en petit, quand même l'apparence de la personne entière n'occuperoit pas un demi-pouce sur le papier, mais il y a plus de difficulté à réussir en grand.

**R E M A R Q U E II.**

*Sur l'ouverture du verre convexe.*

Dans tout ce qui vient d'être dit, il ne faut pas négliger d'examiner l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe ; car bien qu'on ne puisse pas réduire cette ouverture à une mesure fixe, il sera bon toujours de faire attention aux remarques suivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre seroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture, quand les objets sont fort éclairés ; qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils sont exposés à un jour plus foible. 3. Que les traits paroissent mieux marqués avec une petite ouverture qu'avec une plus grande ; & qu'ainsi lorsqu'on veut dessiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il sera possible ; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuer la lumière qui entre par-là dans la machine.

On voit par toutes ces remarques, qu'il est bon d'avoir plusieurs pieces de fer blanc, ou de

Pl. 25. cuivre mince, qui soient rondes, de la grandeur  
fig. 14. du verre, & percées différemment, afin de pouvoir ainsi donner au verre l'ouverture dont on a besoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre, qu'on feroit glisser sur le verre; ou se servir d'une plaque ronde, qui tournant sur son centre, feroit passer sur le verre des trous de différentes grandeurs.

### R E M A R Q U E III.

On trouvera dans l'essai de perspective, qu'on a cité, les démonstrations de tous ces usages, & la description d'une autre machine, qui a des avantages particuliers, mais qui cependant n'est point préférable à celle qu'on a décrite ici.

### P R O B L E M E XXXV.

#### *Des verres à facettes.*

Pl. 26. **L** Es verres à facettes sont des verres taillés à plusieurs faces, tels que le verre LHIM, dont on n'a représenté ici que trois faces LH, HI, IM. Ces verres représentent autant de fois le même objet qu'ils ont de facettes; en sorte que si un verre a 41 facettes, & qu'on regarde un soldat armé, en mettant l'œil dans le point où les rayons de l'objet qui se sont brisés en passant dans les 41 faces, se croisent, on voit une compagnie de 41 soldats, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

C'est ce qu'on peut remarquer en jettant les yeux sur la figure qui représente la coupe de trois faces. L'objet A envoie ses rayons sur les trois faces LH, IH, IM. Ces faces sont tellement taillées, que ces rayons s'étant rompus en passant

par le verre, ils vont se croiser au point G, où l'œil étant placé, il appercevra l'objet A en A, en B & en C, par les trois rayons directs GA, GB, GC: car on a coutume de rapporter dans la ligne droite, qui vient en dernier lieu frapper l'organe de la vue, les objets apperçus, quoique les rayons qui passent de ces objets ayent souffert plusieurs détours, comme on le voit assez par les miroirs plans.

On peut enchâsser un de ces verres à facettes à l'extrémité d'un tuyau, & placer à l'autre extrémité une lentille dans l'endroit où tous les rayons du verre à facettes se croisent, & que j'ai appelé son foyer. On a représenté un de ces verres ainsi enchâssés dans la figure HLIM.

Pl. 26.  
fig. 17.

### R E M A R Q U E.

Si on présente un verre à facettes aux rayons du soleil, & qu'on le mette à la seule ouverture qu'on aura laissé dans une chambre bien fermée, on verra représenter sur un papier blanc, mis à une distance convenable, autant d'images du soleil qu'il y aura de facettes au verre: & ces images seront d'autant plus vives que la chambre sera plus obscure.

Mais on verra quelque chose d'agréable, si après avoir mis à l'ouverture de la chambre obscure un prisme triangulaire, on fait passer par un grand verre à facettes les différentes couleurs des rayons du soleil, produites par le prisme, & qu'on les reçoive sur un papier blanc. On variera encore ces couleurs en leur présentant des verres lenticulaires, & en les faisant ensuite passer par un verre à facettes. On remarquera sans aucune confusion

dans le foyer du verre à facettes , les couleurs les plus belles & les plus brillantes qu'on puisse voir.

## PROBLEME XXXVI.

*Construire un tableau magique.*

Pl. 26,  
fig. 18.

**C'**Est avec un verre à facettes qu'on fait voir une figure très-bien faite , quoiqu'elle soit tout-à-fait difforme sur le tableau où elle est peinte. Pour construire ces sortes de tableaux , qu'on appelle *magiques* , on élèvera à plomb sur une table ABCD une autre table ou planche ADEF : on fera sur ces deux tables des rainures , suivant leur longueur ; les rainures AB & CD de la table horizontale serviront à éloigner ou avancer le pied BCH , & les rainures AF , DE de la planche verticale , serviront à hausser ou baisser un carton sur lequel on collera un papier blanc. On ajustera au haut du pied BCH un tuyau KI dans un autre HI , le tuyau KI contiendra un verre à facettes ; placé en I , & un carton en K , auquel on aura fait un petit trou vers le foyer du verre à facettes.

Cela étant ainsi disposé , on placera le pied BHC sur la table horizontale , dans un lieu convenable , & on l'éloignera plus ou moins de la planche verticale , selon qu'on voudra que les parties de la figure à dessiner sur le papier blanc du rambour , & qu'on veut rassembler par le verre à facettes , soient plus ou moins éloignées les unes des autres. Au petit trou K on placera une lampe ( ce ne doit point être une chandelle ) qui renvoyera de la lumière sur le papier blanc appliqué à la planche verticale ADEF , & l'on marquera avec du crayon le contour de ces surfaces lumineuses.

Quand on aura examiné , en regardant par le trou K , si ces surfaces lumineuses paroissent faire une même superficie , on prendra dans chacune de ces superficies les parties d'un objet qui doivent se réunir toutes quand on les regardera par le verre à facettes , placé dans le tuyau KI. Et sur les espaces qui sont entre ces surfaces , on mettra telles figures grotesques qu'il plaira , pour faire paroître le tableau d'autant plus difforme. On peut aussi prendre dans ces espaces des figures qui composeront une même figure , en les considérant à la vue , avec celles qui seront représentées sur les surfaces lumineuses.

Ainsi lorsqu'on regardera par le trou K , on ne remarquera qu'une seule figure ou image composée de toutes les parties qui sont peintes sur les surfaces lumineuses , & l'on n'appercevra en aucune façon celles qui sont peintes dans les espaces qui sont au milieu. Voyez Wolfius dans sa dioptrique , & Nicéron dans sa perspective curieuse.

## PROBLEME XXXVII.

### *De la lanterne magique.*

**L**A lanterne magique est une sorte de lanterne Pl. 17.  
fig. 19. qui contient une lampe mise au foyer d'un verre convexe , ou d'un miroir concave , à laquelle on applique de petites figures peintes sur des verres renfermés dans un châssis de bois , qu'on fait passer devant la lampe. Ces figures se représentent d'une grandeur énorme sur une muraille ou un drap blanc , exposé à une certaine distance dans une chambre entièrement obscure.

On ne s'étendra pas ici davantage sur la descrip-

& demi, & un objectif convexe des deux côtés, ou d'un côté seulement & plan de l'autre, dont le diamètre soit de douze pieds. Ce télescope sera excellent pour observer les astres.

## IV.

Les lunettes à deux verres convexes se feront de la même manière; mais l'oculaire sera placé au-dessous du foyer de l'objectif. Comme les objets paroissent renversés, on pourra corriger ce défaut en plaçant un miroir au-dessus du foyer de l'oculaire, à peu près à l'endroit où l'on doit placer l'œil. Ce miroir sera de métal bien poli, d'un pouce en ovale, & faisant un angle demi-droit avec l'axe des verres: il faudra en approcher l'œil assez près pour voir distinctement les objets qui paroîtront dans leur situation naturelle. Quand on observe les astres, il n'est pas nécessaire d'y ajouter un miroir, il importe peu en quelle situation ils paroissent: d'ailleurs on s'accoutume bientôt à distinguer leur partie orientale d'avec l'occidentale.

## V.

On observera que dans ces sortes de lunettes, le diamètre de l'objectif doit être grand par rapport à celui de l'oculaire: car, par exemple, une lunette dont l'objectif est de vingt-cinq pieds, portera un oculaire de trois pouces, & celle dont l'objectif sera de cinquante pieds, portera un oculaire qui n'aura que quatre pouces & demi de diamètre. On peut faire une lunette d'une grandeur commode, avec un objectif de deux pieds trois pouces, & un oculaire d'un pouce & demi.

## VI.

Il y a une différence à faire entre les objectifs  
convexes



convexes des deux côtés, & les objectifs convexes plans. Les objectifs convexes des deux côtés d'une même convexité ont leur foyer au centre de l'une des convexités, & les objectifs convexes plans ont leur foyer à l'extrémité du diamètre de la convexité. On mesure la longueur de ces lunettes par l'éloignement du foyer de leur objectif. Ainsi on dit qu'une lunette a douze pieds, si le demi-diamètre de l'objectif convexe des deux côtés est de douze pieds, ou bien si le diamètre de l'objectif plan convexe est de douze pieds.

## V I I.

Si l'on ajoute à la lunette qu'on vient de décrire, deux lentilles semblables à l'oculaire, on aura une lunette d'approche qui fera paroître les objets dans leur situation ordinaire, & qui sera meilleure que la lunette appelée communément *lunette de Galilée*. Ces deux lentilles ajoutées se placent auprès de l'oculaire dans un tuyau séparé, qu'on peut ôter quand on veut. Ainsi une lunette à deux verres peut devenir lunette à quatre verres, en ajoutant le tuyau qui contient les deux oculaires; & en ôtant ce même tuyau, une lunette à quatre verres deviendra facilement lunette à deux verres. Si la lunette à quatre verres a quelque avantage sur la lunette à deux verres, elle a aussi ce désavantage, qu'elle représente les objets moins clairement.

## V I I I.

Pour rendre l'objet vu par les lunettes, plus clair, on met sur l'objectif un carton percé au milieu; on fait plusieurs de ces cartons, dont les ouvertures sont de différente grandeur: on essaie

celui avec lequel on voit l'objet plus distinctement. Ce carton doit avoir son diamètre égal à la largeur de l'objectif ; il faut aussi le noircir , aussi-bien que le dedans des tuyaux , pour empêcher les rayons de lumière de se réfléchir.

## I X.

On frotera le dedans des tuyaux d'un noir huilé, puis on y mettra du charbon broyé, & on les secouera ; enfin on les laissera sécher. On peut encore noircir ces tuyaux de lunettes avec la fumée d'une bougie de poix résine.

*Des microscopes.*

Les lunettes d'approche nous font voir les objets que nous n'appercevons à la vue que confusément , à cause de leur éloignement ; les microscopes nous font voir distinctement les parties des corps que leur petitesse nous rend insensibles. On distingue en général deux sortes de microscopes ; le simple , qui est fait avec une seule lentille , & le composé , qui est fait de plusieurs lentilles. Les microscopes n'ont été connus que dans le siècle dernier vers l'an 1620.

On ne donnera ici la description que de quelques microscopes simples , qu'on peut faire soi-même pour se divertir : la dépense n'en sera pas grande. Si on veut avoir d'autres microscopes, soit simples , soit composés , on consultera les auteurs qui en ont traité , comme Wolfius , Jobelot , & autres.

PROBLÈME XXXIX.

*Faire une lentille pour un microscope simple.*

**I**L faut prendre un morceau de glace de miroir ou de carrosse, & le réduire en très-petits morceaux avec un gressoir de vitrier; au défaut de cet instrument on se servira des dents d'une clef. On choisira entre ces petits morceaux ceux qui seront les plus petits & les plus plats: on en prendra un, avec la pointe d'une grosse aiguille, qui doit être assez longue. On mettra ce petit morceau de glace dans la flamme d'une bougie, où il se fondra en peu de tems; lorsqu'il sera fondu, il tombera de lui-même.

R E M A R Q U E.

On mouillera la pointe de l'aiguille avec de la salive, pour y coller le petit morceau de glace, s'il ne s'y attache point autrement: on penchera un peu la bougie, afin que la lentille ne tombe point dans la cire, & pour la recevoir, il faut mettre au-dessous un morceau de papier, dont les bords soient relevés; car s'ils ne l'étoient pas, les petites gouttes en tombant sauteroient & se perdroient: si ces petites gouttes n'étoient pas assez rondes, on les reprendroit, & on les feroit refondre pour les arrondir davantage. On prend une aiguille assez longue, afin de ne se point brûler, quand on la met dans la flamme de la bougie. On préférera la flamme bleue de la bougie, ou la flamme de l'esprit de vin à la flamme de la bougie.

## PROBLEME XL.

*Faire un microscope avec la lentille dont on vient de donner la construction.*

**P**renez une petite plaque de plomb, que vous rendrez plus ou moins mince, à proportion de la petitesse de la lentille. Faites-y avec la pointe de l'aiguille un trou propre à recevoir la lentille que vous voulez y appliquer ; vous l'y arrêterez avec les bords du trou que vous releverez.

*Usage de ce microscope.*

Ayant laissé tremper pendant deux ou trois jours de l'écorce de chêne, des feuilles d'herbes ou de fleurs seches, ou autre chose, dans de l'eau, on en prendra une goutte avec un petit bâton ; on appliquera cette goutte d'eau sur la surface d'un côté de la lentille : on approchera le plus près qu'on pourra de l'œil l'autre côté de la lentille ; & en regardant à la lumière d'une bougie, on verra une infinité de petits animaux qui sont dans un mouvement continuel.

On peut appliquer sur l'une des surfaces de la lentille, un cheveu, ou autre chose, qu'on y attachera avec un peu de cire des deux côtés de la lentille.

## PROBLEME XLI.

*Faire un microstope avec une goutte d'eau.*

**A**U lieu de la lentille, on mettra une goutte de l'infusion dans le trou de la plaque de plomb, dont on vient de parler dans le problème

précédent ; on regardera à travers cette goutte d'infusion à la lumière d'une bougie , & l'on y appercevra les petits animaux , qui ne cessent de se mouvoir , jusqu'à ce que la goutte soit desséchée , ou qu'elle ait perdu la figure sphérique.

On peut ajuster ce microscope à l'extrémité d'un tuyau de carton , afin que la lumière du grand jour n'empêche point celle de la bougie. Il sera aisé à chacun de faire des réflexions sur ce qu'on vient de dire , pour rendre ces microscopes plus complets , ou pour en inventer d'autres.

*Remarques sur les microscopes simples.*

Les microscopes simples augmentent le diamètre de l'objet qu'on regarde , en raison de la distance du foyer à huit doigts , qui est la distance où l'on peut voir distinctement un petit objet , comme seroient les lettres d'une écriture assez menue. Ainsi si la distance du foyer d'un microscope à ce microscope est d'un demi-doigt , le diamètre de l'objet posé dans le foyer sera augmenté de seize fois , c'est-à-dire , que ce diamètre paroîtra seize fois plus grand. Plus la distance du foyer sera petite , plus le diamètre de l'objet sera augmenté. D'où il suit que les microscopes simples seront d'autant meilleurs , qu'ils seront faits des sphères plus petites.

En comparant une goutte d'eau avec une goutte de glace , dont on a fait les microscopes dans les problèmes précédens , on trouve que la goutte de glace augmente plus le diamètre de l'objet , que la goutte d'eau : car supposant que ces deux gouttes aient chacune  $\frac{1}{10}$  de doigt pour leurs diamètres , le diamètre d'un même objet paroîtra augmenté d'environ 103 fois en le regardant à travers la goutte

de glace, au lieu qu'il ne paroîtra augmenté que d'environ 80 fois en le regardant à travers la goutte d'eau.

La géométrie nous apprend que la superficie d'un quarré ou d'un cercle est en raison doublée du côté du quarré ou du diamètre du cercle, & que le corps cubique ou sphérique est en raison triplée du côté du cube ou du diamètre de la sphere. Ainsi la superficie d'un corps, dont le diamètre sera augmenté de 100 fois paroîtra 10000 fois plus grande, & le corps même paroîtra 1000000 fois plus grand que s'il étoit vu sans microscope. Ce qui est une augmentation très-considérable.

C'est avec cette sorte de microscope qu'on remarque que la poussiere qui est sur les papillons, est semblable à des plumes; que celle qui est sur l'étamine des fleurs, paroît être une multitude de petites boules; que l'eau qui se trouve dans les moules, contient un grand nombre de petites moules; que la semence des animaux contient une grande quantité de petits animaux qui s'y remuent en tous sens; que les cheveux sont ronds & creux. Enfin on peut observer la figure des parties du sang, du lait, &c.

#### *Observation sur les microscopes composés.*

Les microscopes composés ont des avantages très-considérables. Les grains de sable fort menus paroissent comme de petits cristaux; les parties du corps d'une mouche s'y voyent très-distinctement; les particules d'acier qui tombent du fusil quand on le bat pour allumer du feu, paroissent rondes & semblables au plomb des chasseurs. On remarque très-distinctement la circulation du sang, principalement dans la queue d'un poisson appelé

anche, &c. Voyez Poliniere dans ses expériences physiques, p. 501 de la seconde édition.

*De la perspective curieuse.*

P R O B L È M E X L I I.

*Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé.*

**O**N peut déguiser, c'est-à-dire, rendre difforme une figure, par exemple, une tête, en sorte qu'elle n'aura aucune proportion étant regardée de front sur le plan où on l'aura tracée; mais étant vue d'un certain point, elle paroîtra belle, c'est à-dire, dans ses justes proportions. Cela se pratiquera de la sorte.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous Pl. 18, voulez déguiser avec ses justes mesures, décrivez fig. 30. un carré autour de cette figure, comme ABCD, & réduisez-le en plusieurs autres petits carrés, divisant les côtés en plusieurs parties égales, par exemple, en sept, & tirant des lignes droites en long & en travers par les points opposés des divisions, comme font les peintres, quand ils veulent contre-tirer un tableau, & le réduire au petit pied, c'est-à-dire de grand en petit.

Cette préparation étant faite, décrivez à discrétion sur le plan proposé le carré long EBFG; & divisez l'un des deux plus petits côtés EG, BF, comme EG, en autant de parties égales qu'en contient DC, l'un des côtés du carré ABCD; comme ici en sept. Divisez l'autre côté BF en deux également au point H, duquel vous tirerez par les points de division du côté opposé EG au-

tant de lignes droites, dont les deux dernières seront EH, GH.

Après cela ayant pris à discrétion sur le côté BF le point I, au-dessus du point H, pour la hauteur de l'œil au-dessus du plan du tableau, tirez de ce point I au point E, la ligne droite EI, qui coupe ici celles qui partent du point H, aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Par ces points d'intersection vous tirerez des lignes droites parallèles entre elles, & à la base EG du triangle EHG, qui se trouvera ainsi divisé en autant de trapezes qu'il y a de carrés dans le carré ABCD. C'est pourquoi si l'on rapporte dans ce triangle EGH, la figure qui est dans le carré ABCD, en faisant passer chaque trait par les mêmes trapezes ou carrés perspectifs, qui sont représentés par les carrés naturels du grand ABCD, la figure difforme se trouvera décrite. On la verra conforme à son prototype, c'est-à-dire, comme dans le carré ABCD, en la regardant par un trou qui doit être petit du côté de l'œil, & bien évasé du côté de la figure, comme K, que je suppose perpendiculairement élevé sur le point H, en sorte que sa hauteur LK soit égale à la hauteur HI, qui ne doit pas être bien grande, afin que la figure soit plus difforme dans le tableau. Voyez le problème XLIV.

### P R O B L E M E X L I I I.

*Decrire sur un plan une figure difforme ; qui paroisse dans sa perfection, étant vue par réflexion dans un miroir plan.*

Pl. 28.  
fig. 81. **A**Yant, comme on vient de faire, compris la figure qu'on veut déguiser dans un carré,



tal qu'est ABCD, divisé en plusieurs autres petits quarrés, qui sont ici au nombre de seize; & supposant que le miroir est une glace parfaitement quarrée, toute nue & sans quadre, comme EFGH, tirez sur le plan du tableau la ligne droite IK, égale au côté EF du miroir, afin que la figure occupe entierement le miroir EFGH. Ensuite ayant divisé en deux également au point P cette ligne IK, menez par le point du milieu P la perpendiculaire indéfinie LM, en sorte que les deux parties PL, PM, soient égales entre elles, & d'une longueur prise à volonté.

Après cela élevez au point L, la ligne LQ perpendiculaire à la ligne LM, & égale au double de la ligne IK, ou du côté du miroir EF, & au point M, la ligne NO perpendiculaire à la même ligne LM, que vous prendrez aussi double de la ligne IK, en sorte que chacune des deux parties MN, MO, soit égale à la ligne IK. Joignez les droites LN, LO, qui passeront par les points I, K, & formeront le triangle LNO que l'on divisera, comme au problème précédent, en autant de quarrés perspectifs que le quarré ABCD en contient de naturels, pour y transporter de la même façon la figure du quarré ABCD, qui se trouvera difforme sur le plan du tableau, & qui paroîtra belle & semblable à son prototype, étant vue du point Q élevé perpendiculairement sur le point L, comme nous avons dit au problème précédent: ou bien on la verra en son naturel par réflexion dans le miroir EFGH, placé sur la ligne IK, en regardant le miroir par un petit trou élevé perpendiculairement sur le point M, à la hauteur de LQ, comme vous le voyez dans la fig. 82, où IRSK représente le miroir, & Q le point de l'œil, &c.

## PROBLEME XLIV.

*Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse au naturel, sur un plan vertical, transparent, posé entre l'œil & la figure difforme.*

Pl. 29.  
fig. 83.

**I**L est évident que si l'on met en perspective quelque figure que ce soit sur du papier, considéré comme un plan horizontal, & que sur la ligne de terre on élève à angles droits un plan transparent, qui soit, par exemple, de verre; l'œil étant placé vis-à-vis du point de vue, à une hauteur égale à la distance de la ligne de terre à la ligne horizontale, & éloigné du plan transparent, qui représente le tableau d'une distance égale à celle qu'on a supposée dans la perspective, on verra dans le verre la figure difforme dans son naturel. Ceux qui entendent la perspective, comprennent facilement ce que je viens de dire, & ceux qui ne l'entendent pas pourront résoudre ce problème mécaniquement en cette sorte.

Ayant décrit sur une piece de carton ABCD, la figure que vous voulez déguiser, avec ses justes proportions: par exemple, l'œil EF, piquez cette figure EF, comme si vous vouliez faire un ponce: & ayant élevé à angles droits ce carton ainsi piqué sur le plan MNOP, où vous voulez décrire la figure difforme, mettez derrière le carton ABCD, une bougie allumée à telle hauteur & à telle distance qu'il vous plaira, comme en G. Alors la lumière passant par les trous du carton ABCD, portera la figure sur le plan MNOP, & l'y représentera toute défigurée, comme HIKL,

que l'on marquera avec un crayon , ou autrement. Cette image ainsi défigurée paroîtra en son naturel sur un verre mis à la place du carton ABCD, étant regardée par l'œil placé au point G. Elle paroîtra aussi semblable à son prototype EF, étant vue simplement par un petit trou mis au point G, comme au problème XLII.

PROBLÈME XLV.

*Décrire sur la surface convexe d'une sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel étant regardée d'un point déterminé.*

**A**Yant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser, avec ses justes proportions, enfermez-la dans un cercle ABCD, dont le diamètre AC, ou BD, soit égal au diamètre de la sphere proposée. Divisez la circonférence de ce cercle en autant de parties égales qu'il vous plaira, par exemple, en seize. Tirez du centre de ce cercle par les points de division, autant de lignes droites. Divisez aussi le diamètre AC, ou BD de ce cercle en un certain nombre de parties égales, comme en huit, & décrivez du même centre par les points de division des circonférences de cercles, lesquelles avec les lignes droites tirées du centre, diviseront le cercle ABCD en 64 petits espaces.

Pl. 30;  
fig. 84

Décrivez encore un autre cercle EFGH égal au précédent ABCD, & menez de son centre I la ligne droite IK, égale à la distance de l'œil au centre de la sphere proposée, en sorte que la partie GK soit égale à la hauteur de l'œil sur la surface de la même sphere. Ensuite ayant mené par le même centre I, le diamètre FH perpendiculaire à

Pl. 30, la ligne IK, divisez ce diamètre FH en autant de  
fig. 30. parties égales, que le diamètre du premier cercle  
ABCD, sçavoir, en huit parties égales. Puis tirez  
du point K, par les points de division autant de  
lignes droites, qui donneront sur le demi-cercle  
FGH, les points 1, 2, 3, 4, & sur l'autre demi-  
cercle FEH, les points 5, 6, 7.

Cette préparation étant faite, décrivez sur la  
surface convexe du globe proposé MLO du point  
L, comme pole, & des intervalles  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  
 $G_4$ , GF, des cercles parallèles entre eux, dont le  
plus grand sera MNO, duquel on ne voit ici que  
la moitié, qu'il faut diviser en autant de parties  
égales que la moitié du cercle ABCD, comme ici  
en huit parties égales. Décrivez par les points de  
division & par le pole L, autant de grands cercles,  
qui avec les précédens diviseront l'hémisphère  
LMNO en autant de petits espaces que le cercle  
ABCD, dans lesquels on transportera l'image du  
cercle ABCD. Cette image, ou figure, qui sera dé-  
figurée dans l'hémisphère LMNO, paroîtra néan-  
moins semblable à son prototype, qui se trouve  
dans ce cercle ABCD, étant regardée d'un point  
élevé perpendiculairement sur le point L, & éloi-  
gné de ce point L d'une distance égale à la ligne GK.

### R E M A R Q U E.

Ce que nous avons fait sur la surface convexe  
d'une sphere, se peut faire de la même façon sur la  
surface concave de la même sphere, excepté que  
les cercles parallèles qui ont été décrits du pole L,  
avec les ouvertures  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , &c. doivent être  
décrits avec les ouvertures  $E_5$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ , EF,  
c'est-à-dire, qu'au lieu de se servir du demi-cercle

FGH, que l'œil placé au point K voit par sa convexité, on doit se servir de l'autre demi-cercle FEH, que l'œil placé au même point K, voit par sa concavité.

# PROBLEME XLVI.

*Décrire sur la surface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vue d'un point déterminé.*

**A**yant, comme à l'ordinaire, renfermé la figure qu'on veut déguiser en un quarré KLMN, divisé en plusieurs autres petits quarrés, & ayant déterminé le point de l'œil en O, à une distance raisonnable du cylindre proposé ABCD, dont la base est le cercle AFBG, tirez du centre E de cette base par le point déterminé O, la ligne droite EO; menez perpendiculairement à cette ligne EQ, par le même centre E, le diamètre AB, que vous diviserez en autant de parties égales qu'en contient le côté KL du quarré KLMN. Tirez du point O, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur la circonférence du demi-cercle AFB, que l'œil voit, les points 1, 2, 3, 4, & sur la circonférence de l'autre demi-cercle AGB, que l'œil ne voit pas, les points 5, 6, 7.

Pl. 30.  
fig. 85.

Après cela tirez par les points 1, 2, 3, 4, sur la surface du cylindre des lignes parallèles entre elles & à l'axe du même cylindre, ou au côté AD, ou BC. Puis ayant divisé une de ces parallèles en autant de parties égales qu'en contient le diamètre AB, décrivez sur la surface du même cylindre par les points de division des circonfé-

rences de cercle paralleles à la circonférence AFBG, lesquelles, avec les lignes droites paralleles précédentes, formeront de petits espaces, dans lesquels on transportera la figure du quarré KLMN. Cette image, qui se trouvera défigurée sur la surface du cylindre ABCD, paroîtra néanmoins conforme à son prototype, étant regardée par un petit trou placé au point O, où l'œil a été supposé dans la construction.

### REMARQUE.

Ce que nous venons de faire sur la surface convexe du cylindre ABCD, se peut faire de la même façon dans la surface concave, en se servant du demi-cercle AGB, comme nous avons fait du demi-cercle AFB, c'est-à-dire, en élevant des perpendiculaires des points 5, 6, 7, dans la surface concave, comme nous avons fait des points 1, 2, 3, 4, dans la surface convexe, &c.

### PROBLEME XLVII.

*Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel, étant regardée d'un point déterminé.*

Pl. 31,  
fig. 86.

**D**écrivez autour de la figure que vous voulez déguiser, un cercle à volonté, comme ABCD, & divisez sa circonférence en autant de parties égales qu'il vous plaira, comme en huit. Tirez par les points de division A, E, B, F, &c, au centre O, autant de demi-diametres. L'un de ces demi-diametres, comme AO, étant divisé, par exemple, en trois parties égales aux points 7, 8,

vous décrivez du centre  $O$ , par ces points de division, 7, 8, autant de circonférences de cercles, Pl. 31. fig. 86. qui, avec les demi diametres précédens, diviseront l'espace terminé par la premiere & plus grande circonférence  $ABCD$  en 24 petits espaces, qui serviront à contre-tirer l'image qui y sera comprise, & à la défigurer sur la surface convexe d'un cone, quand cette surface aura été divisée en autant de semblables petits espaces, en cette sorte.

Ayant tiré à part la ligne  $IK$  égale au diametre de la base du cone proposé, & l'ayant divisé en deux également au point  $L$ , élevez en ce point  $L$  la perpendiculaire  $LM$  égale à la hauteur du cone. Joignez les droites  $MI$ ,  $MK$ , qui représenteront les côtés de ce cone, que je suppose droit, comme si ce cone avoit été coupé par un plan tiré par son axe, de sorte que le triangle isoscele  $IKM$  représentera le triangle de l'axe.

Cela étant fait, prolongez la perpendiculaire  $LM$  en  $N$ , autant au-dessus du point  $M$ , qui représente la pointe du cone, que vous voudrez que l'œil soit élevé au-dessus de cette pointe; en sorte que la ligne  $MN$  soit égale à la distance de l'œil au sommet du cone. Ayant divisé la moitié  $IL$  de la base  $IK$  en autant de parties égales que le demi-diametre  $AO$  du prototype, tirez du point  $N$ , par les points de division 1, 2, les droites  $N_1$ ,  $N_2$ , qui donneront sur le côté  $IM$  les points 4, 3. Enfin décrivez de la pointe du cone & des intervalles  $M_3$ ,  $M_4$ , des circonférences de cercle sur la convexité du cone, qui représenteront les circonférences du prototype  $ABCD$ . Puis ayant divisé la circonférence de la base du cone en autant de parties égales qu'en contient la circonférence  $ABCD$ , tirez de la pointe du centre par les

points de division autant de lignes droites, qui, avec les circonférences précédentes, diviseront la surface convexe du cône en 24 espaces difformes, qui représenteront ceux du prototype ABCD, & dans lesquels par conséquent on transportera la figure de ce prototype, qui se trouvera difforme sur la surface du cône, & qui étant regardé de l'œil mis directement au-dessus de la pointe du cône à la distance MN, paroîtra comme une surface plane & conforme à son prototype.

### R E M A R Q U E.

Pl. 31, fig. 37. Ce que nous venons de faire sur la surface convexe d'un cône posé sur sa base, peut se pratiquer de la même façon sur la surface concave d'un cône creux, posé sur sa pointe, excepté qu'il faut prolonger la perpendiculaire LM au-delà du point L en N; de sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cône, qui dans ce cas lui doit servir de base, afin que l'œil placé en N, le puisse voir par le dedans, &c.

### P R O B L E M E XLVIII.

*Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir cylindrique droit, étant vue par réflexion d'un point donné.*

Fig. 88. **I**L faut premièrement enfermer dans un carré, comme ABCD, la figure qu'on veut déguiser, & diviser ce carré ABCD en seize autres petits carrés, qui serviront à transporter la figure du prototype sur les carrés semblables difformes qu'on



qu'on aura décrits sur la surface placée au pied du miroir cylindrique, dont la base est le cercle  $FGHI$ , qui a le point  $E$  pour centre. Ce qui se fera en cette sorte.

Pl. 31;  
fig. 88.

Si  $K$  est l'assiette de l'œil, c'est-à-dire, le point qui répond sur le plan horizontal perpendiculairement à l'œil qui peut être éloigné du cylindre d'un ou de deux pieds, & un peu plus haut que le cylindre, afin qu'il puisse voir par réflexion plus de parties du plan horizontal; tirez par ce point  $K$  & par le centre  $E$ , la droite  $KE$ . Divisez  $KE$  en deux parties égales au point  $L$ . De ce point  $L$  & pour rayon  $LE$ , décrivez l'arc de cercle  $FEH$ , qui donnera sur la circonférence  $FGHI$ , les deux points  $F$ ,  $H$ . Par le point  $K$ , & par les points  $F$ ,  $H$ , vous tirerez les droites  $KFS$ ,  $KHT$ , qui toucheront cette circonférence aux mêmes points  $F$ ,  $H$ .

Après cela divisez chacun des deux arcs égaux  $EF$ ,  $EH$ , en deux également aux points  $M$ ,  $N$ ; & tirez du point  $K$  par les points  $M$ ,  $N$ , les droites  $KM$ ,  $KN$ , qui donneront sur la circonférence  $FGHI$ , les deux points  $O$ ,  $P$ . Par ces points  $G$ ,  $P$ , vous tirerez les deux lignes  $OQ$ ,  $PR$ , en sorte que l'angle de réflexion  $FOQ$  soit égal à l'angle d'incidence  $PGK$ , en prenant la ligne  $KO$  pour un rayon d'incidence, & que pareillement l'angle de réflexion  $HPR$  soit égal à l'angle d'incidence  $OPK$ , en prenant la ligne  $KP$  pour un rayon d'incidence. Alors les cinq lignes  $IK$ ,  $OQ$ ,  $PR$ ,  $FS$ ,  $HT$ , représenteront les lignes du prototype, qui sont parallèles aux deux côtés  $AD$ ,  $BC$ , que les deux touchantes  $ES$ ,  $HT$ , représentent. Il ne reste plus qu'à diviser ces lignes en quatre parties égales en représentation; ce que je

Pl. 31, ferai de la maniere qui suit, pour avoir plutôt fait  
fig. 88. sans que l'erreur puisse être considérable.

Ayant mené par le point I, où la ligne KE coupe la circonférence FGH, la ligne 1, 2, perpendiculaire à la même ligne KE, qui sera terminée aux points 1, 2, par les deux touchantes KF, KH, tirez du centre E par le point H la droite Ho, que vous ferez égale à la ligne 1, 2, & divisez-la en quatre parties égales aux points 7, 8, 9. Tirez ensuite par le point K, la droite KX, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallèle à la ligne Ho, ou perpendiculaire à la touchante KH. Ayant appliqué une regle bien droite au point X, & aux points de division 7, 8, 9, 0, marquez des points sur la ligne HT, dans les endroits où elle se trouvera coupée successivement par la regle. La ligne HT se trouvera divisée aux points 7, 8, 9, T, en parties égales en apparence à celle de la ligne 1, 2, qui est divisée par les lignes tirées du point K, en quatre parties qui sont presque égales entre elles. Enfin portez les divisions de la touchante HT sur l'autre touchante FS.

Pour diviser la ligne PR en quatre parties égales en représentation à celles de la ligne 1, 2, tirez par le point P, la ligne P6, que vous ferez perpendiculaire à la ligne KP, & égale à la ligne 1, 2. Divisez cette perpendiculaire P6 en quatre parties égales aux points 3, 4, 5. Tirez pareillement par le point K, la ligne KV, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallèle à la ligne P6, ou perpendiculaire à KP. Ayant comme auparavant appliqué une regle au point V, & aux points de division 3, 4, 5, 6, marquez sur la ligne KP prolongée les points 3, 4, 5, 6,

dans les endroits où elle sera coupée par la règle. Enfin portez les divisions de la ligne PN sur chacune des deux lignes PR, OQ, & faites passer par les points également éloignés de la circonférence FCHI, qui ont été marqués sur les quatre lignes FS, OQ, PR, HT, quatre circonférences de cercles, qui avec les lignes droites FS, OQ, IK, PR, HT, formeront seize quarrés difformes, dans lesquels on transportera la figure du prototype ABCD, qui se trouvera défigurée sur le plan horizontal, & qui paroîtra dans sa perfection sur la surface convexe du miroir cylindrique, posé droit sur la base FGHI, quand elle sera vue par réflexion de l'œil élevé perpendiculairement sur le point K à une hauteur égale à la ligne KV ou KX. Voyez la remarque du problème suivant.

Pl. 31 ;  
fig. 88.

PROBLEME XLIX.

*Décrire sur un plan horizontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vue par réflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone.*

**D**Ecrivez autour de la figure que vous voulez déguiser, le cercle ABCD d'une grandeur prise à volonté, & divisez sa circonférence en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira. Tirez du centre E par les points de division autant de demi-diamètres, dont l'un, comme AE, ou DE, doit aussi être divisé en un certain nombre de parties égales. Décrivez du centre E par les points de division autant de circonférences de cercle, qui

Pl. 32.  
fig. 89.

Pl. 32, avec les demi-diamètres précédens, diviseront  
fig. 39. l'espace terminé par la première & plus grande circonférence ABCD, en plusieurs petits espaces, qui serviront à entretenir la figure qui y sera comprise, & à la défigurer sur le plan horizontal autour de la base FGHI du miroir conique en cette sorte.

Ayant pris le cercle FGHI, dont le centre est O, pour la base du cône, faites à part le triangle rectangle KLM, dont la base KL soit prise égale au demi-diamètre OG de la base du cône, & la hauteur KM égale à la hauteur du même cône. Prolongez cette hauteur KM en N, de sorte que la partie MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cône, ou toute la ligne KN égale à la hauteur de l'œil au-dessus de la base du cône. Ayant divisé la base KL en autant de parties égales qu'en contient le demi-diamètre AE, ou DE, du prototype, tirez du point N, par les points de divisions P, Q, R, autant de lignes droites, qui donneront sur l'hypoténuse LM, qui représente le côté du cône, les points S, T, V. Faites au point V l'angle  $\angle LV_1$  égal à l'angle  $\angle LVR$ , au point T l'angle  $\angle LT_2$  égal à l'angle  $\angle LTQ$ , au point S l'angle  $\angle LS_3$  égal à l'angle  $\angle LSP$ , & au point M, qui représente le sommet du cône, l'angle  $\angle LM_4$  égal à l'angle  $\angle LMK$ , pour avoir sur la base KL prolongée les points 1, 2, 3, 4.

Enfin décrivez du centre O de la base FGHI du miroir conique, & des intervalles  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , des circonférences de cercles, qui représenteront celles du prototype ABCD, & dont la plus grande doit être divisée en autant de parties égales que la circonférence ABCD. Puis tirez du centre O, par les points de division, des demi-diamètres

qui donneront sur le plan horizontal autant de petits espaces difformes que dans le prototype ABCD, dans lesquels par conséquent on pourra transporter la figure de prototype. Cette image se trouvera extrêmement défigurée sur le plan horizontal, & paroîtra néanmoins par réflexion dans ses justes proportions sur la surface du miroir conique posé sur le cercle FGHI, quand l'œil sera mis perpendiculairement au-dessus du centre O, & éloigné de ce centre O d'une distance égale à la ligne KN.

R E M A R Q U E.

Pour ne vous pas tromper en transportant ce qui est dans le prototype ABCD, sur le plan horizontal, on prendra garde que ce qui est le plus éloigné du centre E, doit être le plus proche de la base FGHI du miroir conique, comme vous voyez par les mêmes lettres, *a, b, c, d, e, f, g, h*, du plan horizontal & du prototype. On observera la même chose à l'égard d'un miroir cylindrique, comme vous voyez aussi par les quatre lettres semblables *a, b, c, d*, du plan horizontal & du prototype.

Pl. 32 ;  
fig. 88.

P R O B L E M E L.

*Décrire une lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.*

**F**Aites une lanterne qui ait la forme d'un cylindre, ou d'un petit tonneau situé selon sa longueur, comme un tonneau de vin posé dans une cave, en sorte que la fumée passe par le bondon. Mettez à l'un de ses deux fonds un miroir

concave parabolique. Appliquez à son foyer la flamme d'une bougie, dont la lumière se réfléchira fort loin en passant par l'autre fond qui doit être ouvert, & elle paroîtra si éclatante, que la nuit on pourra lire de fort loin des lettres très-petites, lorsqu'on les regardera avec des lunettes de longue vue. Ceux qui verront de loin la lumière de cette bougie, croiront voir un grand feu, qui paroîtroit encore plus éclatant, si la lanterne, étant étamée par le dedans, avoit la figure d'une ellipse.

### R E M A R Q U E.

On se sert aussi d'un semblable miroir pour la *lanterne magique*, ainsi appelée, parce que par son moyen l'on fait voir sur une muraille blanche de quelque chambre obscure tout ce que l'on veut. De sorte qu'on peut faire paroître des monstres & des spectres si affreux que celui qui les voit sans en connoître le secret, croit que cela se fait par magie. La lumière qui se réfléchit par le moyen de ce miroir, passe par un trou de la lanterne, où il y a un verre de lunette. On fait passer entre ce verre & la lumière une piece de bois plate & déliée, contenant plusieurs petits verres peints de diverses figures extraordinaires & affreuses, que l'on fait couler successivement par une fente qui est dans le corps de la lanterne. Ces petites figures se représentent sur la muraille opposée avec leurs mêmes couleurs & proportions en plus grand volume : ce qui donne de la terreur, & cause de l'admiration aux spectateurs qui n'en connoissent pas l'artifice. Voyez les problèmes de physique.

## P R O B L E M E L I.

*Par le moyen de deux miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes.*

**A**Yant placé horifontalement l'un des deux miroirs plans, élevez l'autre à peu près à angles droits au-dessus du premier, les deux miroirs demeurant dans cette situation, si vous vous approchez du miroir perpendiculaire, vous y verrez votre visage tout à fait difforme & imparfait, car il paroîtra sans front, sans yeux, sans nez & sans oreilles, vous ne verrez que la bouche & le menton fort élevés. Si vous inclinez tant soit peu le miroir perpendiculaire, votre visage y paroîtra avec toutes ses parties, excepté les yeux & le front. Si vous l'inclinez un peu plus, vous y verrez deux nez & quatre yeux, & en l'inclinant encore un peu davantage, vous y verrez trois nez & six yeux. Si vous continuez à l'incliner un peu davantage, vous ne verrez plus que deux nez, deux bouches & deux mentons; & en l'inclinant encore un peu plus, vous y verrez seulement un nez & une bouche: & votre visage cessera de paroître entièrement dans ce miroir, si vous l'inclinez encore un peu plus, ce qui arrivera lorsque l'angle d'inclinaison sera d'environ 45 degrés.

Si vous inclinez les deux miroirs l'un à l'autre, vous y pourrez voir votre visage tout entier, & par les différentes inclinaisons, vous verrez dans le même miroir l'image de votre visage alternativement droite & renversée, &c.

## R E M A R Q U E.

Si on mêle avec la matiere du miroir, lorsqu'elle

est encore dans la fournaise, un peu de massicot, de safran, ou quelque autre couleur jaune, celui qui s'y mirera paroîtra avoir la jaunisse. Si on y mêle du noir en petite quantité, il paroîtra avoir la face livide & comme plombée : si on en mêle en plus grande quantité, il semblera avoir le visage d'un Ethiopien. Si on y jette de la lacque, du cinabre ou vermillon, celui qui s'y regardera, sera étonné de se voir tout rouge & comme enflammé de colere, ou enluminé comme un yvrogne. En un mot, on paroîtra avoir autant de couleurs différentes qu'on en aura mêlé dans la matiere dont on aura fait les miroirs où l'on se regardera.

## PROBLEME LII.

*Faire voir un jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide.*

Pl 27 ,  
fig. 10. **O**N a mis un jetton C au fond d'un vase vuide AB. On s'est éloigné du vase, jusqu'à ce que l'extrémité E du bord de ce vase ait caché ce jetton à l'œil placé en D. On propose de faire en sorte que l'œil apperçoive le jetton, sans changer la situation de l'un ni de l'autre. Faites remplir d'eau le vase : aussi-tôt l'œil appercevra le jetton, comme s'il étoit un peu élevé vers F.

On a déjà dit que les rayons de lumiere se rompoient en s'écartant de la perpendiculaire, lorsqu'ils passaient d'un milieu transparent dans un autre milieu transparent plus fluide. Le vase étant vuide, on ne pouvoit appercevoir le jetton, parce que le bord du vase empêchoit les rayons de lumiere d'être réfléchis du jetton à l'œil. Mais le



vase ayant été rempli d'eau , un rayon de lumière , par exemple , CE , sortant de l'eau , au lieu de continuer jusqu'en G par la droite EG , se détourne & va frapper l'œil par la ligne ED , qui s'écarte de la perpendiculaire EH.

Ce jetton paroît un peu élevé vers F , à cause qu'on croit le voir par la ligne droite DF , qui est égale aux deux lignes AE & EC.

On explique par ce principe pourquoi un bâton mis obliquement dans l'eau , paroît rompu.

### PROBLEME LIII.

*Représenter une iris sur le plancher d'une chambre obscure.*

**I**L faut se servir d'un prisme triangulaire , que les artisans appellent simplement triangle , qui étant appliqué sur la racine du nez , fait paroître les objets avec des couleurs semblables à celle de l'iris , ou arc-en-ciel. Mettez ce prisme à une fenêtre de la chambre où le soleil donne , les rayons du soleil en passant au travers de ce verre triangulaire , formeront sur le plancher de la chambre une iris , qui sera très-agréable à voir , principalement si le plancher est fait en voûte , parce que cela donnera à l'iris une figure ronde & semblable à celle de l'iris que nous voyons dans les nuées.

### REMARQUES.

Ce prisme triangulaire nous donne occasion de rapporter ici ce que M. de Mairan a dit dans sa dissertation sur les phosphores & les noctiluques , touchant les rayons de lumière qui passent

au travers d'un prisme triangulaire. Voici de quelle maniere il s'exprime.

« On prouve par des expériences décisives ,  
» Que la lumiere contient en elle-même toutes  
» les couleurs indépendamment des configurations  
» intérieures ou extérieures des corps au travers  
» desquels elle passe , ou sur lesquels elle se réflé-  
» chit ; c'est à-dire , qu'un rayon sensible du soleil,  
» par exemple , est composé de particules de diffé-  
» rente espece , dont chacune a la propriété d'ex-  
» citer dans l'ame , par le moyen de l'organe de la  
» vue , le sentiment de couleur particulière de cette  
» espece , sans qu'aucune réflexion , ni qu'aucune  
» réfraction puisse jamais la changer.

» Que le blanc n'est pas proprement une couleur  
» mais un composé de toutes les couleurs , & que  
» le noir au contraire n'est que la négation de tou-  
» tes les couleurs.

» Que chaque couleur des corps ne consiste dans  
» la figure & dans l'arrangement particulier des  
» parties qui le composent , qu'en tant qu'ils sont  
» par-là plus propres à rompre & à absorber dans  
» leurs pores la lumiere d'une certaine couleur , &  
» à réfléchir celles d'une autre couleur. Ainsi le  
» carmin , par exemple , est fort rouge , parce qu'il  
» ne réfléchit que la lumiere rouge , & que toutes  
» les autres especes de lumiere se rompent & se  
» perdent dans ses pores sans se réfléchir.

» Enfin que chaque espece de lumiere a sa réfrac-  
» tion déterminée , c'est à-dire , que chaque cou-  
» leur , en passant obliquement d'un milieu dans un  
» autre , de l'air , par exemple , dans le cristal , se  
» rompt à sa rencontre par un angle particulier ,  
» différent de celui des autres couleurs. C'est ce  
» que M. Newton , auteur de cette découverte ,

» appelle la *différente réfrangibilité des couleurs de*  
» *la lumière*. C'est principalement par cette pro-  
» priété qu'il a reconnu toutes les autres, & les  
» ingénieuses expériences, dont il s'est servi pour  
» s'en assurer, pourroient toutes seules immortaliser un nom moins célèbre que le sien. Voici la  
» plus facile, qui suffira néanmoins pour mettre  
» les personnes qui n'ont pas vu l'optique de M.  
» Newton, au fait de ce que j'ai à dire sur cette  
» matière ».

» Faites entrer un rayon de soleil dans une cham-  
» bre obscure, par un petit trou rond de 3 ou 4 li-  
» gnes de diamètre : placez horizontalement auprès  
» de ce trou un prisme triangulaire de verre, dans  
» une telle situation que le rayon du soleil soit à  
» peu près perpendiculaire à l'axe de ce prisme, &  
» qu'il entre par une de ses surfaces, & sorte par  
» l'autre, de manière que le tranchant formé par  
» ces deux surfaces, regarde en bas. Ce rayon,  
» après avoir traversé le prisme, entrera dans la  
» chambre, en s'étendant de bas en haut, & s'ira  
» peindre sur le mur opposé. Il est encore mieux de  
» le recevoir sur un carton bien blanc, à sept ou  
» huit pas de la fenêtre, & il y formera une bande  
» verticale d'un pied de longueur, par exemple, &  
» de deux ou trois pouces de largeur. Cette bande  
» contiendra séparément les cinq couleurs primiti-  
» ves, rouge, jaune, verd, bleu & violet, qui la  
» diviseront en cinq espaces un peu inégaux, en  
» commençant par le bas dans l'ordre précédent,  
» rouge, &c. Les nuances, ou les couleurs secon-  
» des, se trouveront entre les couleurs primitives  
» dont elles participent; sçavoir, entre le rouge & le  
» jaune, la couleur d'or foncé; entre le bleu azuré  
» & le violet, le bleu turquin, & ainsi des

» autres. Si l'on fait passer au travers d'un autre  
 » prisme, à quatre ou cinq pas du premier, une  
 » seule de ces couleurs séparées, qui composoient  
 » le rayon, elle ne changera point du tout en s'y  
 » rompant, parce qu'elle ne contient qu'une lu-  
 » miere homogene; mais si on les ramasse toutes  
 » par le moyen de quelque verre convexe, elles  
 » se confondront, & il se formera de leur confusion  
 » un nouveau rayon de lumiere blanc tirant sur le  
 » jaune, & tel qu'il étoit en partant du soleil, ou  
 » avant que d'avoir traversé ce premier prisme.  
 » On peut varier cette expérience de mille manie-  
 » res, & à force de filter, si je l'ose dire, & de  
 » tamiser ainsi la lumiere, se convaincre parfaite-  
 » ment qu'elle a toutes les propriétés dont j'ai fait  
 » mention. Il faut observer sur-tout que le diffé-  
 » rent degré de réfrangibilité de ses couleurs,  
 » lorsqu'elle passe au travers d'un prisme, est l'uni-  
 » que cause de leur séparation, & qu'ainsi le vio-  
 » let, par exemple, est plus réfrangible que le  
 » rouge de la quantité d'un angle, dont le sinus est  
 » proportionnel à la distance qu'il y a du rouge au  
 » violet dans la bande verticale ».

*Fin du premier tome.*

---

# TABLE

## DES PROBLÈMES.

---

### PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

**P**ROBLEME I. *Des religieuses sont retirées en huit cellules , tellement disposées , qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'abbesse , qu'on suppose aveugle , fait sa visite : elle compte le nombre des religieuses qui sont dans les trois cellules d'un rang ; elle trouve que le nombre des religieuses d'un rang est égal à celui de chaque autre rang , en prenant pour un rang deux cellules des coins & celle du milieu. Cette abbesse fait une seconde visite , & compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la premiere visite , quoiqu'il y soit entré quatre hommes. Enfin dans la troisieme visite qu'elle fait , elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes qu'auparavant , quoique les quatre hommes soient sortis , & qu'ils aient emmené chacun une religieuse ,* p. 1

**PROBL. II.** *On a mené sur le bord d'une riviere un loup , une chevre & un chou. On propose à un batelier de les passer seul à seul , de maniere qu'en son absence le loup ne fasse aucun mal à la chevre , & que la chevre ne touche point au chou.* 3

**PROBL. III.** *Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obscure , au passage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau sans batelier. Ce bateau est si petit , qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande*

## T A B L E

*comment ces six personnes passeront deux à deux, de sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.*

**PROBL. IV.** *Faire l'addition d'une maniere particuliere, & qui soit inconnue à tout autre.*

**PROBL. V.** *Soustraire par une seule opération plusieurs sommes de plusieurs autres sommes données.*

**PROBL. VI.** *Multipliation abrégée.*

*Multipliation par les doigts.*

*Autre multipliation abrégée.*

**PROBL. VII.** *Division abrégée.*

**PROBL. VIII.** *De quelques propriétés des nombres.*

*Règle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.*

*Table des nombres premiers entre 1 & 10000.*

**PROBL. IX.** *Des triangles rectangles en nombres.*

**PROBL. X.** *De la progression arithmétique.*

**QUESTION I.** *Un propriétaire fait faire un puits à un maçon, avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la premiere toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisieme, & ainsi de suite en augmentant de 2 l. à chaque toise, jusqu'à 20 toises de profondeur, on demande combien il sera dû au maçon quand les 20 toises de profondeur seront achevées.*

**QUEST. II.** *Un voyageur a fait 100 lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait 2 lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.*

**QUEST. III.** *Un voyageur a fait 100 lieues en 8 jours, & il a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.*

**QUEST. IV.** *Un voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour; il est poursuivie par un archer qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisieme,*

## DES PROBLEMES.

*& ainsi de suite en augmentation de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'archer atteindra le voleur, & combien de lieues chacun aura fait.*

63

**QUEST. V.** *On suppose que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, que 2 couriers sont partis en même tems & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faisant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faisant 3 lieues chaque jour plus que le précédent, & que précisément au milieu du chemin ils se sont rencontrés, le premier au bout de cinq jours, & le second au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux couriers ont fait chaque jour.*

64

**QUEST. VI.** *Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place.*

65

**QUEST. VII.** *Un marchand est convenu avec un de ses créanciers de lui donner de l'argent chaque semaine : la première semaine il lui a donné cent l. la seconde quatre cent l. il a augmenté chaque semaine son paiement de trois cent l. On demande combien il a payé la vingt huitième semaine.*

66

**QUEST. VIII.** *Un réservoir a douze canaux : par le second il s'écoule dans une heure 2 pintes d'eau plus que par le premier : par le troisième 2 pintes plus que par le second, & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une heure.*

67

**QUEST. IX.** *Un pere de famille ordonne par son testament que l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens 10000 l. & le septième de ce qui restera ; que le second prendra 20000 l. & le septième de ce qui*

## T A B L E

- restera ; que le troisieme prendra 30000 l. & le septieme de ce qui restera, & ainsi de suite en augmentant toujours de 10000 liv. avec le septieme du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu. 67*
- PROBL. XI.** *De la progression géométrique. 68*
- QUEST. I.** *Un grand navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils font sur le même rumb, &c. On demande le chemin que le grand navire doit faire pour atteindre le petit. 75*
- QUEST. II.** *On suppose qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrape cette tortue, & à quelle distance il l'attrapera. 76*
- QUEST. III.** *Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposons qu'elles partent toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent se rencontrer. ibid.*
- QUEST. IV.** *Un maquignon vend un très-beau cheval, il se contente du prix du vingt-quatrieme clou du cheval, pourvu qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnât un denier, du second 2 deniers, du troisieme 4 deniers, & ainsi de suite, en doublant les deniers jusqu'au vingt-quatrieme clou. On demande de quel prix seroit le cheval. 77*
- QUEST. V.** *Une vieille dame possède trente deux belles terres; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous prétexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soient pleins. On offre de lui donner pour cette terre*



## DES PROBLEMES.

|  |            |
|--|------------|
| <i>la somme qui conviendrait à la trente-deuxieme des terres, si on payoit un sol pour la premiere, deux sols pour la seconde, quatre sols pour la troisieme, &amp; ainsi de suite en doublant les sols jusques à la trente-deuxieme terre. Cette dame appréhende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa terre.</i> | 78         |
| <b>QUEST. VI.</b> <i>On suppose qu'un grain de bled produise 50 autres grains dans la premiere année; qu'on sème ces 50 grains, &amp; qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxieme année, &amp; ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de bled qui seront produits pendant douze années.</i>                          | 79         |
| <b>QUEST. VII.</b>   | 80         |
| <b>PROBL. XII.</b> <i>Des quarrés magiques.</i>  | 81         |
| <i>Des quarrés magiques impairs, formés par des termes en progression arithmétique.</i>  | 83         |
| <b>QUEST.</b> <i>Disposer en trois rangs les neuf premieres cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme.</i>  | 93         |
| <i>Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progression arithmétique.</i>   | 94         |
| <i>Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progression géométrique.</i>  | 98         |
| <i>Des quarrés magiques impairs, dont les termes sont en progression géométrique.</i>  | 100        |
| <i>Des quarrés magiques en proportion harmonique.</i>  | 101        |
| <b>PROBL. XIII.</b> <i>Du triangle arithmétique.</i>   | 103        |
| <i>Des combinaisons.</i>   | ibid.      |
| <b>QUEST. I.</b>   | 112        |
| <b>QUEST. II.</b>  | 113        |
| <i>Des permutations.</i>   | ibid.      |
| <b>Tome I.</b>   | <b>G g</b> |

# T A B L E

|  |       |
|--|-------|
| QUEST. I.  | 118   |
| QUEST. II.   | ibid. |
| QUEST. III.  | 119   |
| QUEST. IV.   | ibid. |
| QUEST. V.  | 120   |
| QUEST. VI.   | 121   |
| QUEST. VII.  | 122   |
| <i>Des parties de jeu.</i>   | 123   |
| <i>Du jeu de dés.</i>  | 131   |
| PROBL. XIV. <i>Plusieurs dés étant jettés , trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.</i>   | 135   |
| PROBL. XV. <i>Deux dés étant jettés , trouver les points de dessus de chaque dé sans les voir.</i>   | 138   |
| PROBL. XVI. <i>Trois dés étant jettés , trouver les points de dessus de chaque dé , sans les voir.</i>   | 140   |
| PROBL. XVII. <i>Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.</i>   | 141   |
| PROBL. XVIII. <i>Trouver le nombre qui reste à quelqu'un après quelques opérations , sans lui rien demander.</i>   | 151   |
| PROBL. XIX. <i>Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé , sans lui rien demander.</i>  | 154   |
| PROBL. XX. <i>Deviner deux nombres que quelqu'un aura pensé.</i>   | 156   |
| PROBL. XXI. <i>Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.</i>   | 160   |
| PROBL. XXII. <i>Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles , &amp; un nombre impair en l'autre main , deviner en quelle main est le nombre pair.</i>                   | 164   |
| QUESTION. <i>Une personne tenant une piece d'or dans une main , &amp; une piece d'argent en l'autre , trouver en quelle main est la piece d'or , &amp; en quelle main est la piece d'argent.</i> | 166   |

## DES PROBLEMES.

**PROBL. XXIII.** Trouver deux nombres dont on connoît la raison & la différence. 167

**QUESTION.** Quelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoie que dans l'autre, deviner combien il en a en chaque main. 168

**PROBL. XXIV.** 169

**QUEST. I.** Une personne ayant pris autant de jettons ou pieces de monnoie dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout. 169

**QUEST. II.** Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres, &c. 175

**QUEST. III.** De l'âne & du mulet. 176

**QUEST. IV.** Les Graces portant des couronnes de fleurs, &c. 178

**QUEST. V.** Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres, mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun. 179

**QUEST. VI.** Un pere en mourant laisse sa femme enceinte, &c. *ibid.*

**QUEST. VII.** On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en enfance, la cinquieme partie en la jeunesse, le tiers en l'âge viril, & qu'il y a treize ans qu'elle a commencé à entrer dans sa vieillesse. On demande l'âge de cette personne. *ibid.*

**QUEST. VIII.** Quarante une personnes se sont trouvées à un repas: il y avait des hommes & des femmes & des enfans. La dépense a été de quarante sols, les hommes ont payé quatre sols par tête, les femmes trois sols chacune, & les enfans quatre deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans. 180

**QUEST. IX.** Du lion de bronze, &c. *ibid.*

## T A B L E

- QUEST. X.** Trois imprimeurs veulent entreprendre l'impression d'un livre, &c. 181
- PROBL. XXV.** Deux personnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre proposé, en continuant alternativement jusqu'à ce que tous leurs nombres fassent ensemble un nombre déterminé plus grand que je le propose, faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand. 182
- PROBL. XXVI.** Diviser un nombre donné en deux parties dont la raison soit égale à celle de deux nombres donnés. 184
- QUEST. I.** Faire la monnoie d'un écu blanc en deux espèces différentes, en sorte qu'il y ait autant d'une espèce que de l'autre. 185
- QUEST. II.** Un marchand de vin n'a que deux sortes de vins, l'un à dix sols, & l'autre à cinq sols la bouteille. On lui demande trente bouteilles de vin à huit sols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de sorte que la bouteille revienne à huit sols? 187
- PROBL. XXVII.** Trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par des nombres donnés, il reste par-tout  $r$ , & étant divisé par un autre nombre donné, il ne reste rien. 188
- QUEST.** Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point. 192
- PROBL. XXVIII.** Diviser plusieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres: en sorte que multipliant la première partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la somme des

## DES PROBLEMES.

*deux produits soit par-tout la même.* 199

**QUEST. I.** *Une femme a vendu dix pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu vingt-cinq au même prix, & une troisieme femme en a vendu trente aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.* 204

**QUEST. II.** *Du chef de cuisine, &c.* 214

**QUEST. III.** *Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages, &c.* 212

**PROBL. XXIX.** *Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle, 1, 2, 3, 4, &c. étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé. ibid.*

**PROBL. XXX.** *Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacune en aura pris.* 214

**PROBL. XXXI.** *De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois personnes aura prise.* 215

**PROBL. XXXII.** *Trois cartes ayant été présentées à trois personnes, deviner celle que chacune aura prise.* 217

**PROBL. XXXIII.** *Deviner entre plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensé.* 218

**PROBL. XXXIV.** *Plusieurs cartes différentes étant proposées successivement à autant de personnes, pour en retenir une dans sa mémoire, deviner celle que chacune aura pensée.* 219

**PROBL. XXXV.** *Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensée.* 220

**PROBL. XXXVI.** *Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tiré d'un jeu de cartes.* 221

**PROBL. XXXVII.** *Deviner le nombre de tous les points qui sont en deux cartes qu'on aura tiré d'un*

# T A B L E

- jeu de cartes entier,* 222
- PROBL. XXXVIII.** *Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tiré d'une volonté d'un jeu de cartes.* 224
- PROBL. XXXIX.** *De seize jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.* 231
- PROBL. XL.** *Du jeu de l'anneau.* 233
- PROBL. XLI.** *Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensée.* 236
- PROBL. XLII.** *Ayant un vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisième vase contenant trois pintes.* 238
- PROBL. XLIII.** *Une personne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner six pintes au frère quêteur ; il n'a pour les mesurer que deux autres bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les six pintes dans la bouteille de sept pintes ?* 240
- PROBL. XLIV.** *Partager à trois personnes vingt-un tonneaux, dont il y en a sept vuides, sept pleins & sept demi-pleins ; de telle manière que ces trois personnes aient autant de tonneaux & de vin l'un que l'autre.* 242
- PROBL. XLV.** *Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvant, &c.* 246
- PROBL. XLVI.** *Trois choses ayant été distribuées secrètement à trois personnes, deviner celle que chacun aura pris.* 250
- PROBL. XLVII.** *Trois personnes ont un certain nombre d'écus : la première personne donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune ; ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune ; enfin la troisième en donne aux*

## DES PROBLEMES.

*deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.* 253

**PROBL. XLVIII.** *Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus âgée que la première de douze ans, la troisième est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.* 254

**PROBL. XLIX.** *Découvrir si un ouvrage que l'ouvrier assure être de pur or, est mêlé d'argent, sans l'endommager.* ibid.

**PROBL. L.** *Un boucher donne commission d'acheter pour cent écus cent bêtes ; sçavoir, des bœufs, des veaux, &c.* 255

**PROBL. LI. QUEST. I.** *Un particulier a fait marché avec un ouvrier pour creuser un puits, &c.* 256

**QUEST. II.** *Un tailleur a pris six aulnes de drap, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet : on veut sçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.* 257

**PROBL. LII.** *Faire parcourir au cavalier du jeu des échets toutes les cases du damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case.* 260

---

## PROBLEMES DE GEOMETRIE.

**PROBLEME I.** *Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ses extrémités.* 270

**PROBL. II.** *Mener par un point donné une ligne parallèle à une ligne donnée.* 271

**PROBL. III.** *Diviser d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.* 272

## T A B L E

- PROBL. IV.** *Faire un angle qui soit la moitié, ou le double d'un angle donné.* 273
- PROBL. V.** *Faire un angle qui soit le tiers, ou le triple d'un angle donné.* 274
- PROBL. VI.** *Trouver à deux lignes données une troisième, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.* ibid.
- PROBL. VII.** *Décrire sur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les aires soient égales.* 275
- PROBL. VIII.** *Décrire sur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les contours soient égaux.* 276
- PROBL. IX.** *Décrire deux triangles isosceles différens, de même aire, & de même contour.* 277
- PROBL. X.** *Décrire différens triangles rectangles, dont les aires soient égales.* 280
- PROBL. XI.** *Décrire trois triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisieme soit obtusangle.* 282
- PROBL. XII.** *Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné.* 284
- PROBL. XIII.** *Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.* 286
- PROBL. XIV.** *Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi la circonférence du cercle donné.* 288
- PROBL. XV.** *Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles qui touchent la circonférence & le diamètre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux.* 289
- PROBL. XVI.** *Décrire quatre cercles proportionnels, en sorte que leur somme soit égale à un cercle*



## DES PROBLÈMES.

*donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée.* 290

**PROBL. XVII.** *Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc dont le sinus soit égal à la corde d'un complément de cet arc.* 291

**PROBL. XVIII.** *Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en proportion géométrique.* 292

**PROBL. XIX.** *Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.* 294

**PROBL. XX.** *Décrire un triangle rectangle dont les trois côtés soient en proportion arithmétique.* 295

**PROBL. XXI.** *Décrire autour d'un triangle équilatéral donné six cercles égaux, qui se touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du triangle, & les trois autres sont portés par ses sommets.* 296

**PROBL. XXII.** *Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes, étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.* 297

**PROBL. XXIII.** *Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres soit égale au contour.* 298

**PROBL. XXIV.** *Décrire au dedans d'un triangle équilatéral trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce triangle.* 299

**PROBL. XXV.** *Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres soit sesquialtre de*

# T A B L E

- contour aussi exprimé en nombres.* 301
- PROBL. XXVI.** Décrire au dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les côtés de ce quarré. 302
- PROBL. XXVII.** Décrire un parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres soit égale au contour. 303
- PROBL. XXVIII.** Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses extrémités. 305
- PROBL. XXIX.** Mesurer une ligne horizontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrémités, par le moyen de deux bâtons inégaux. 306
- PROBL. XXX.** Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre. 307
- PROBL. XXXI.** Trouver à trois lignes données une quatrieme proportionnelle. *ibid.*
- PROBL. XXXII.** Décrire sur une ligne donnée un parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle du triangle donné. 308
- PROBL. XXXIII.** Changer un triangle donné en un autre triangle, dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du triangle donné. *ibid.*
- PROBL. XXXIV.** Deux demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonférences des deux demi-cercles donnés. 309
- PROBL. XXXV.** Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnés sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles. 311
- PROBL. XXXVI.** Trois demi-cercles qui se touchent en dedans, étant donnés, &c. 312
- PROBL. XXXVII.** Décrire un triangle dont l'aire

## DES PROBLEMES.

*& le contour soient au même nombre quarré.* 314

**PROBL. XXXVIII.** *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, sans en connoître le centre.* 315

**PROBL. XXXIX.** *Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrémités, étant données, trouver sur cette ligne aussi donnée, un point également éloigné de deux autres extrémités des deux lignes données.* 316

**PROBL. XL.** *Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes soient telles, &c.* 317

**PROBL. XLI.** *Diviser la circonférence d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux, en sorte que le demi-diametre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.* 319

**PROBL. XLII.** *Une échelle d'une longueur connue, &c.* 320

**PROBL. XLIII.** *Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumière & du bruit d'un canon.* 321

**PROBL. XLIV.** *Mesurer la surface d'un parallélogramme.* 323

**PROBL. XLV.** *Mesurer la surface d'un cercle.* 325

**QUEST. I.** *Une cuisinière étant allée au marché, &c.* 327

**QUEST. II.** *Une corde de dix pieds de long entoure deux cents piques, on veut sçavoir combien une corde de huit pieds de long entourera de piques.* 328

**QUEST. III.** *Sempronius a emprunté de Caius un sac de bled qui avoit cinq pieds de haut & quatre pieds de large; quand il fallut rendre le bled, Sempronius prit quatre sacs hauts de cinq pieds, &c.* *ibid.*

**QUEST. IV. V. VI.** *ibid.*

**PROBL. XLVI.** *Tracer un ovale sur le terrain.* 329

**PROBL. XLVII.** *Mesurer la surface d'un ovale.* 330

## T A B L E

### PROBLEMES DE MUSIQUE.

**P**ROBL. I. *Faire sur les accords les quatre opérations de l'arithmétique.* 332

**P**ROBL. II. *Exprimer les accords par logarithmes.* 334

**P**ROBL. III. *Partager l'intervalle de l'octave en sept autres intervalles simples, qui sont les tons & demi-tons.* 335

**P**ROBL. IV. *Mesurer la durée des tons.* 341

**P**ROBL. V. *Faire trembler sensiblement & à vue d'œil la corde d'une basse de viole, ou de quelque autre instrument sans que personne y touche.* 342

### PROBLEMES D'OPTIQUE.

**P**ROBL. I. *Faire qu'un objet, étant vu de loin ou de près, paroisse toujours de la même grandeur.* 346

**P**ROBL. II. *La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrémité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vue la plus grande qu'elle puisse être vue dans toute l'étendue de la ligne CZ.* 347

**P**ROBL. III. *L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vue de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.* 348

**P**ROBL. IV. *Trouver un point duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroissent égales.* 349

**P**ROBL. V. *Un anneau étant placé, à une certaine distance, proposer de l'enfiler avec une baguette recourbée par l'une de ses extrémités.* 350

**P**ROBL. VI. *Représenter en perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vue.* 351

## DES PROBLEMES.

**PROBL. VII.** Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par huit exagones réguliers & égaux entre eux. 352

**PROBL. VIII.** Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par huit triangles équilatéraux & égaux entre eux. 355

**PROBL. IX.** Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par douze triangles isosceles & égaux entre-eux, dont la hauteur est égale à la base. ibid.

**PROBL. X.** Représenter en perspective un polyedre équilatéral terminé par douze quarrés égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par six octogones réguliers & égaux. 357

**PROBL. XI.** Un point de quelque objet, & le lieu de l'œil, étant donnés, trouver le point de réflexion sur la surface d'un miroir plat. 359

**PROBL. XII.** Tirer par derrière l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue. 360

**PROBL. XIII.** Les points d'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface d'un miroir plat, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé. 361

**PROBL. XIV.** Se représenter dans un miroir comme volant. 363

**PROBL. XV.** Disposer plusieurs miroirs de maniere qu'on se voie dans chacun en même tems. ibid.

**PROBL. XVI.** Un mari jaloux étant dans une chambre, lui fait voir ce que fait sa femme, &c. 364

**PROBL. XVII.** Faire paroître dans un miroir un autre objet que celui qui semble devoir y être représenté. 365

**PROBL. XVIII.** Faire une boîte où l'on voie des objets, &c. 367

# T A B L E

*point déterminé.*

439

**PROBL. XLIII.** *Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection étant vue par réflexion dans un miroir plan.*

440

**PROBL. XLIV.** *Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse au naturel sur un plan vertical transparent posé entre l'œil & la figure difforme.*

442

**PROBL. XLV.** *Décrire sur la surface convexe d'une sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel étant regardée d'un point déterminé.*

443

**PROBL. XLVI.** *Décrire sur la surface convexe d'un cylindre, une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vue d'un point déterminé.*

445

**PROBL. XLVII.** *Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel étant regardée d'un point déterminé.*

446

**PROBL. XLVIII.** *Décrire sur un plan horizontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir cylindrique droit, étant vue par réflexion d'un point donné.*

448

**PROBL. XLIX.** *Décrire sur un plan horizontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vue par réflexion d'un point donné, dans l'axe prolongé de ce cone.*

451

**PROBL. L.** *Décrire une lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.*

453

**PROBL. LI.** *Par le moyen de deux miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes.*

455

**PROBL. LII.** *Faire voir un jetton qui seroit caché à l'œil dans le fond d'un vase vuide.*

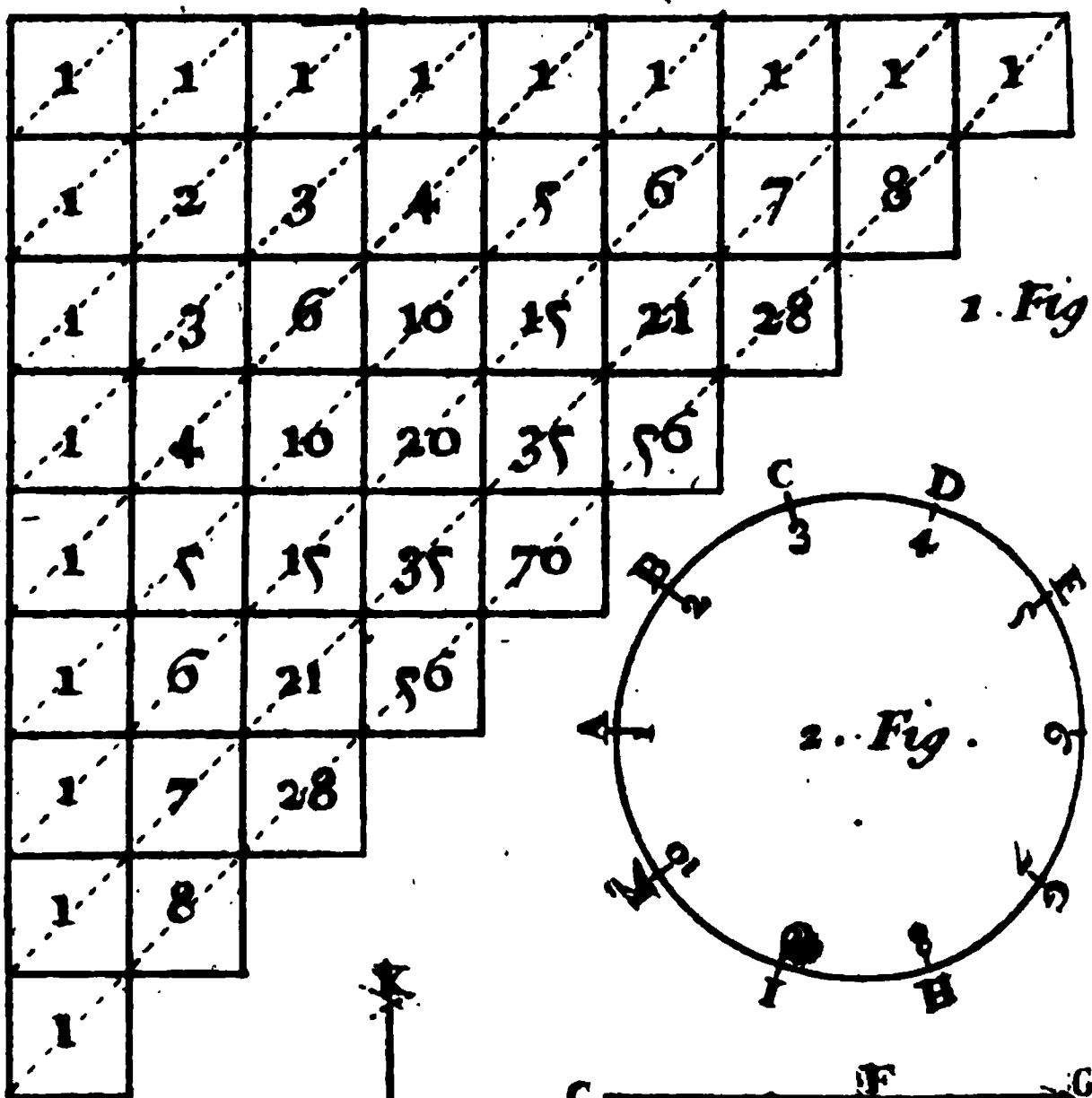
456

**PROBL. LIII.** *Représenter une iris sur le plancher d'une chambre obscure.*

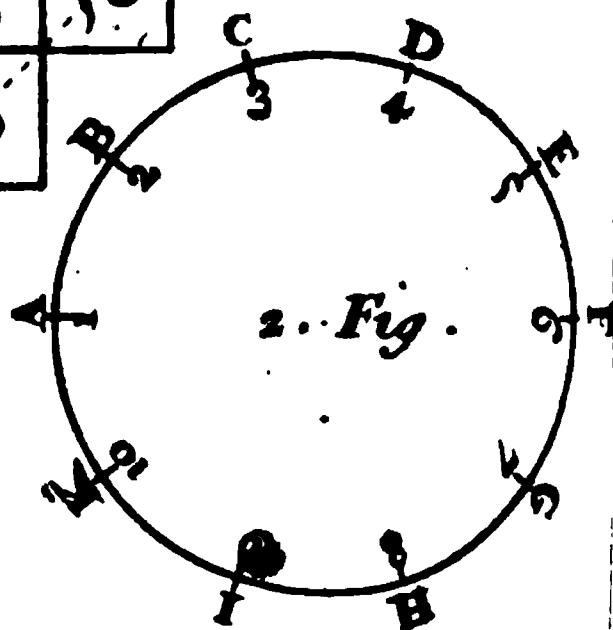
457

Fin de la table du I. tome.





1. Fig.



2. Fig.

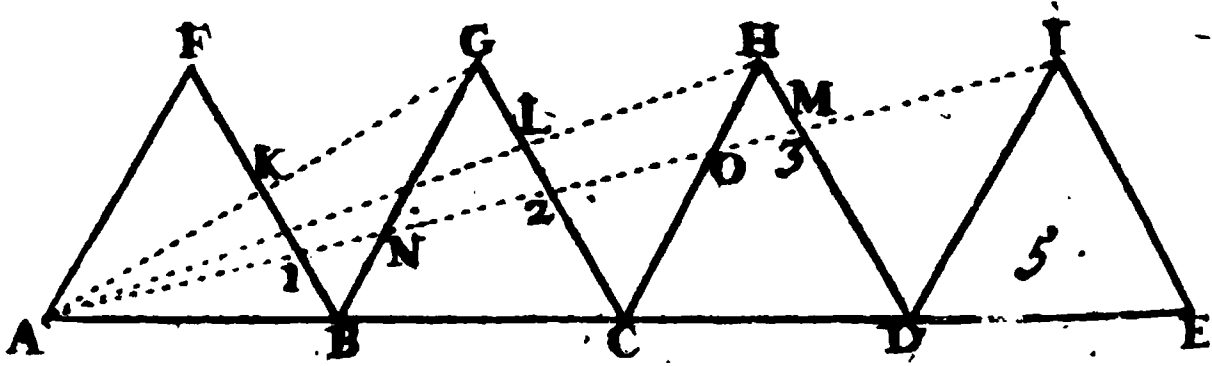
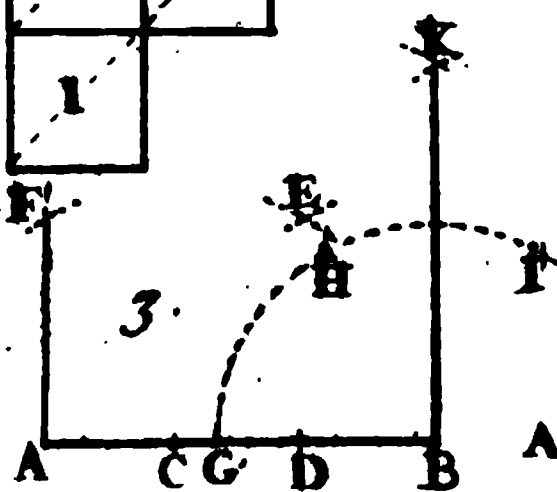






Figure. 1<sup>re</sup>

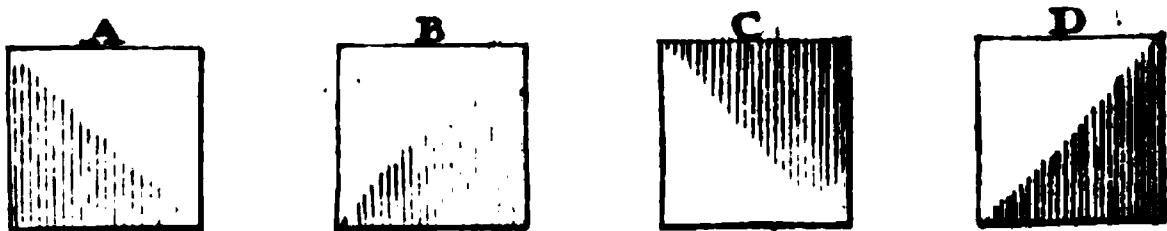


Figure. 3.

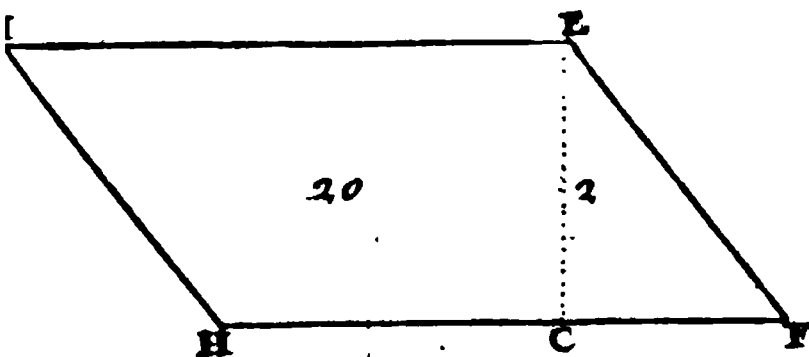


Figure. 2.

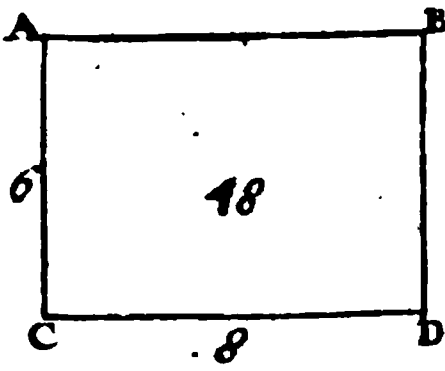


Figure. 5.

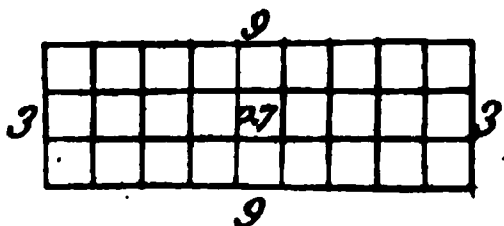


Figure. 4.

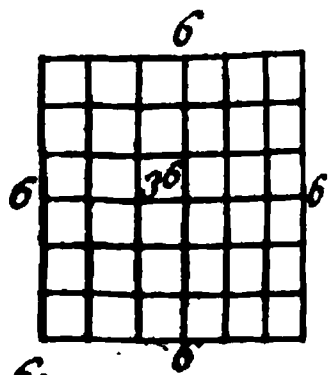


Figure. 6.

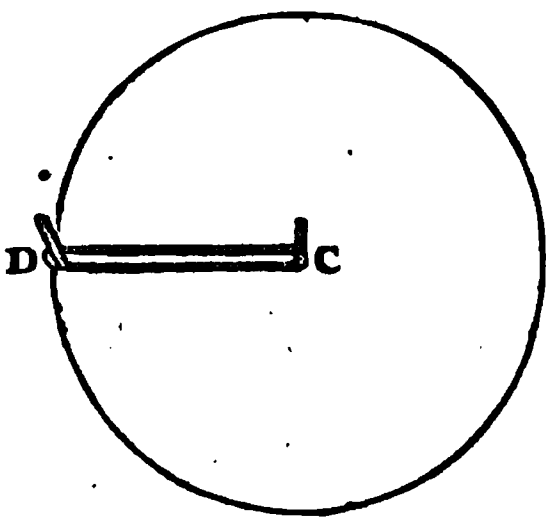
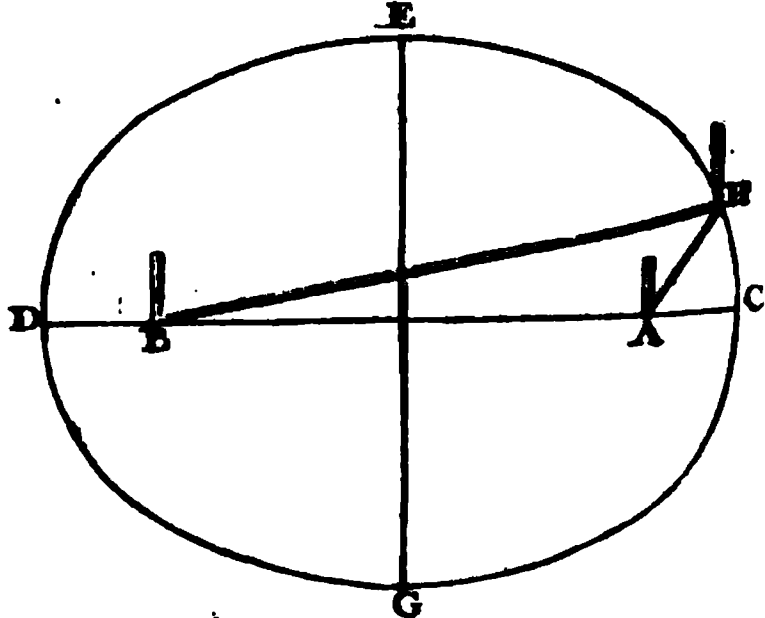
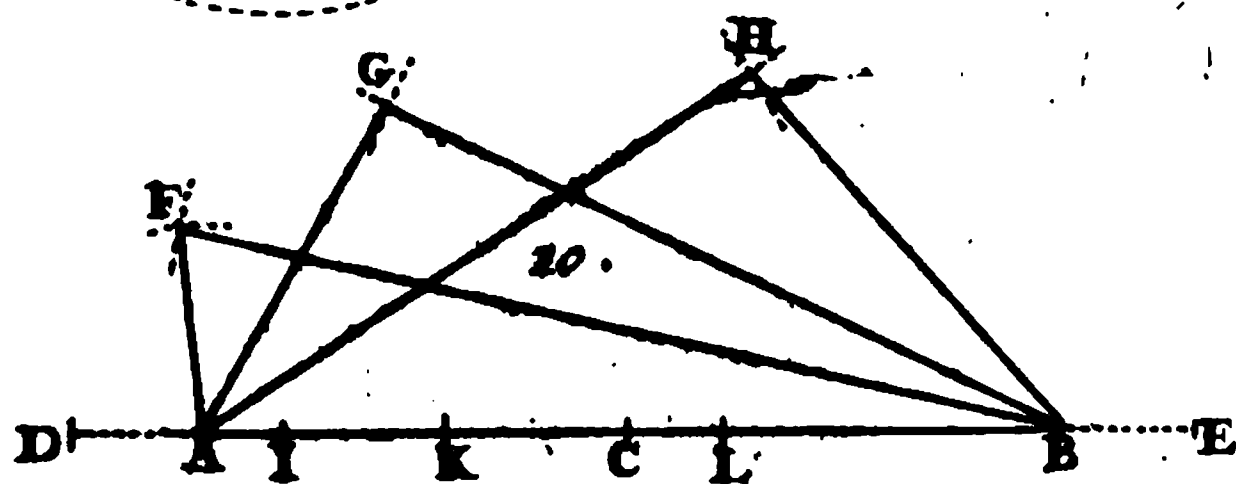
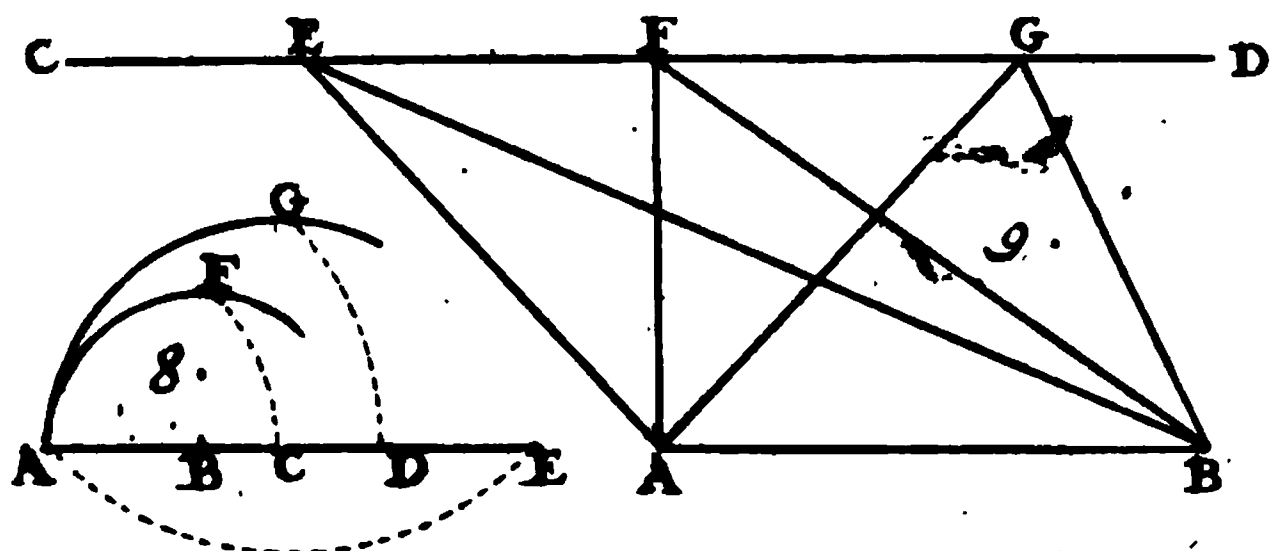
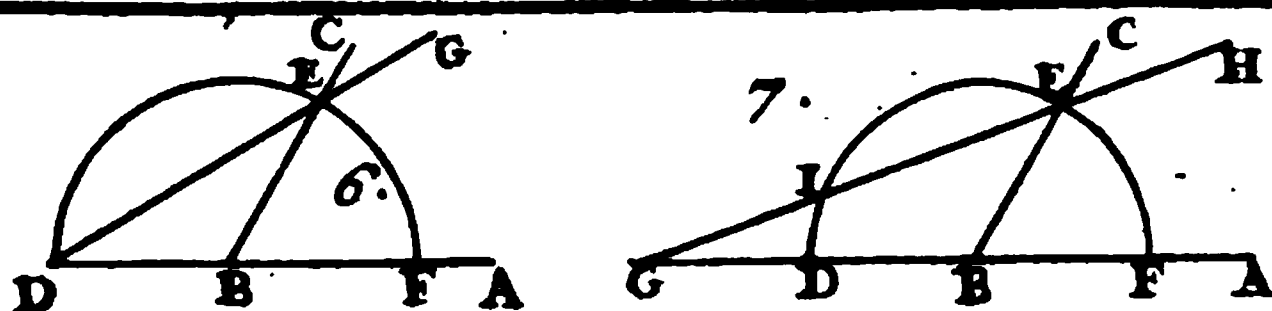
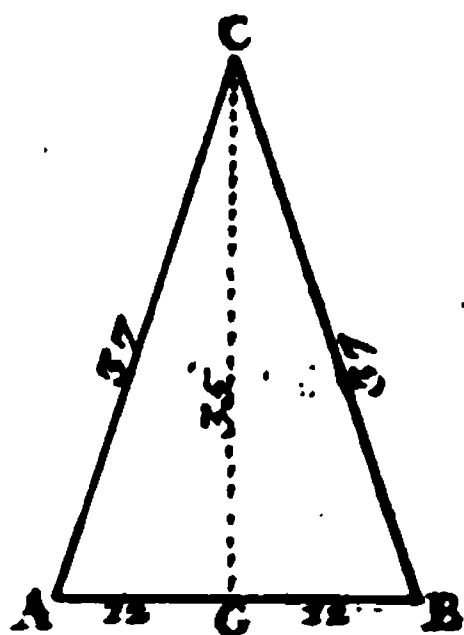


Figure. 6.

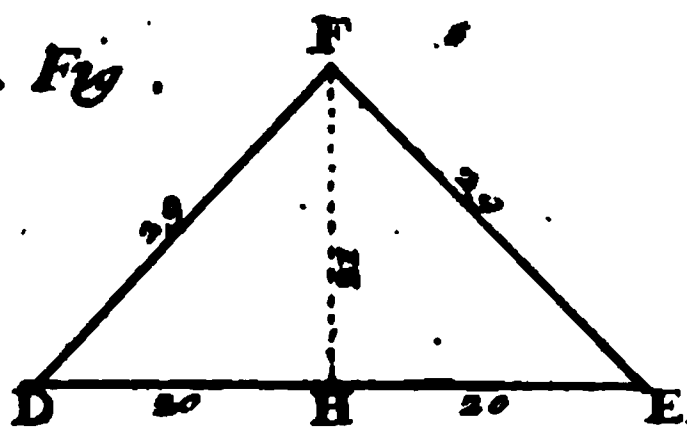




Echelle de 35 parties.  
I 3 10 15 20 25 30 35 K

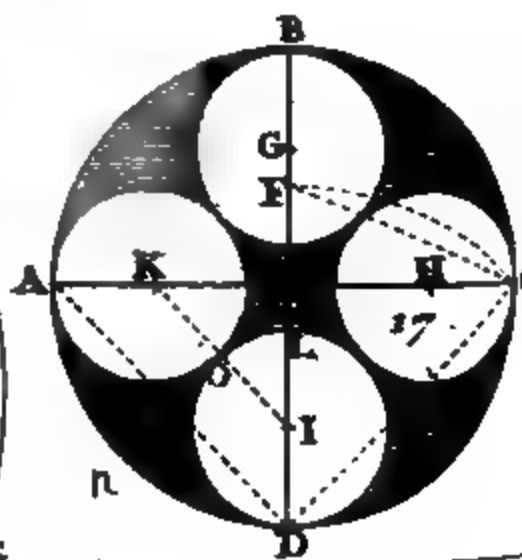
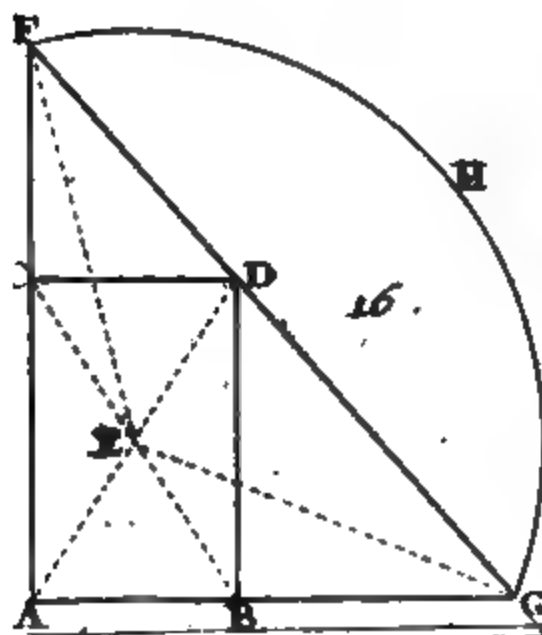
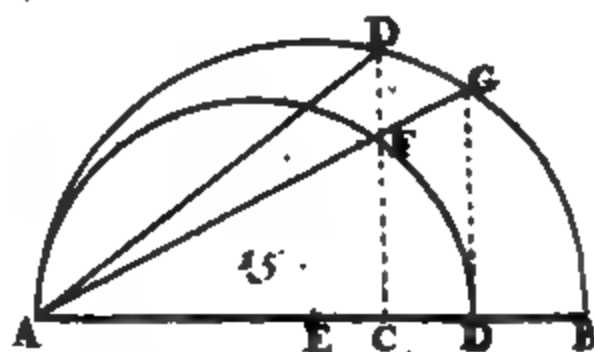
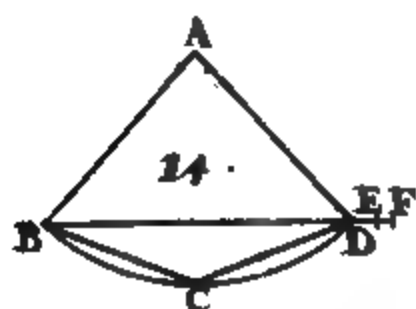
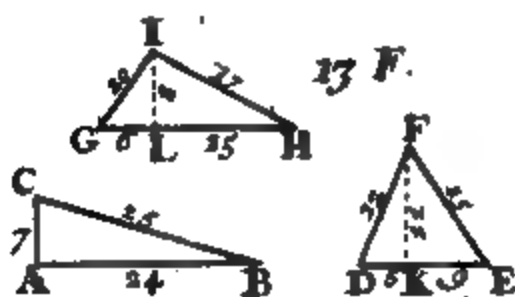
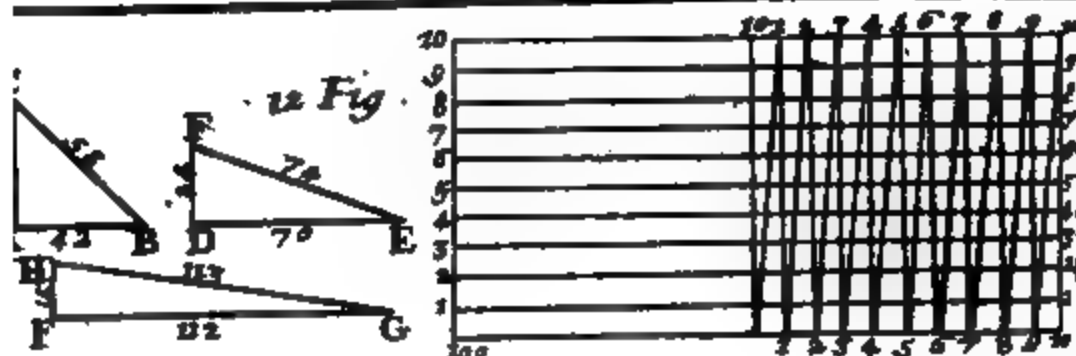


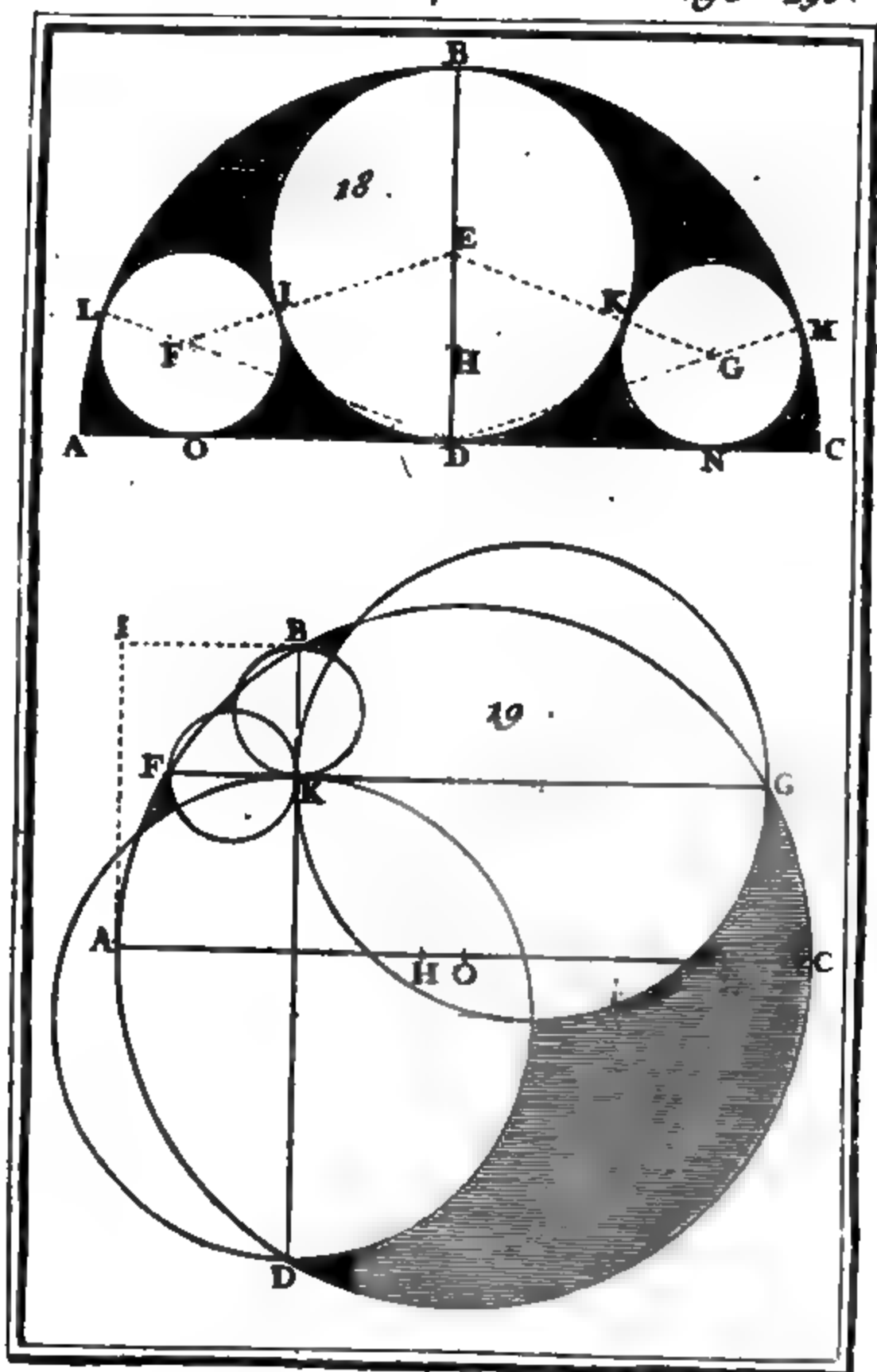
11. Fig.









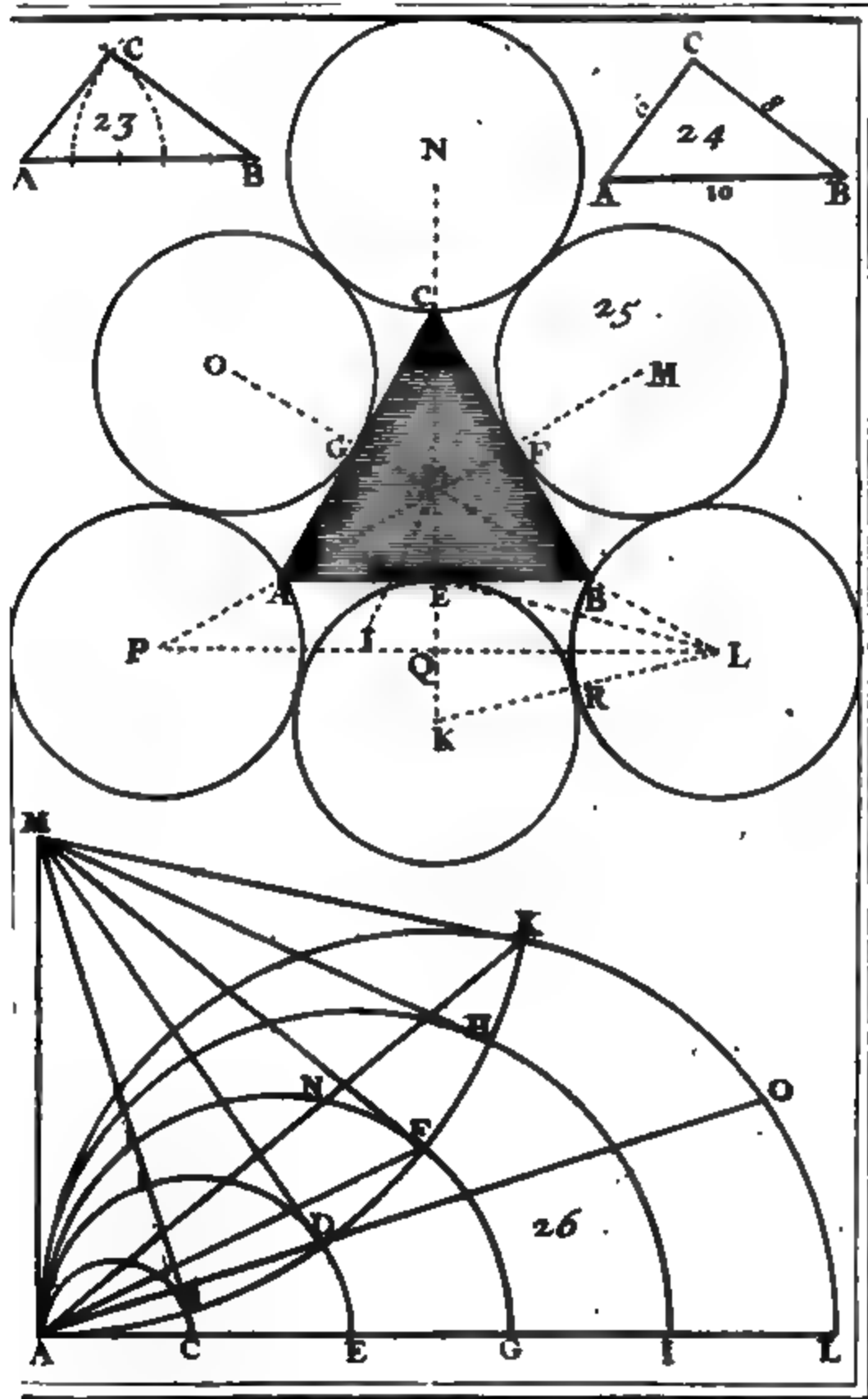






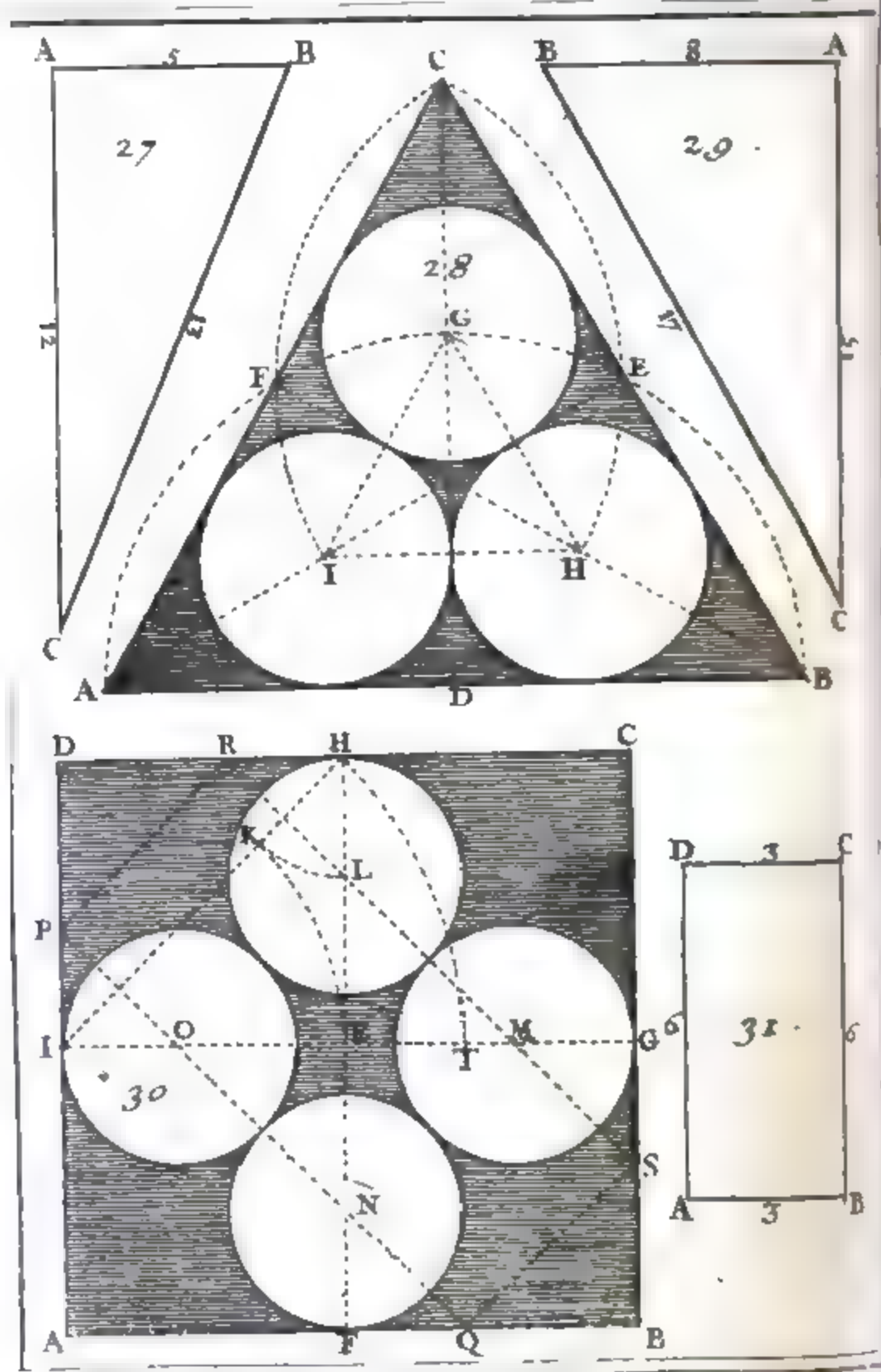


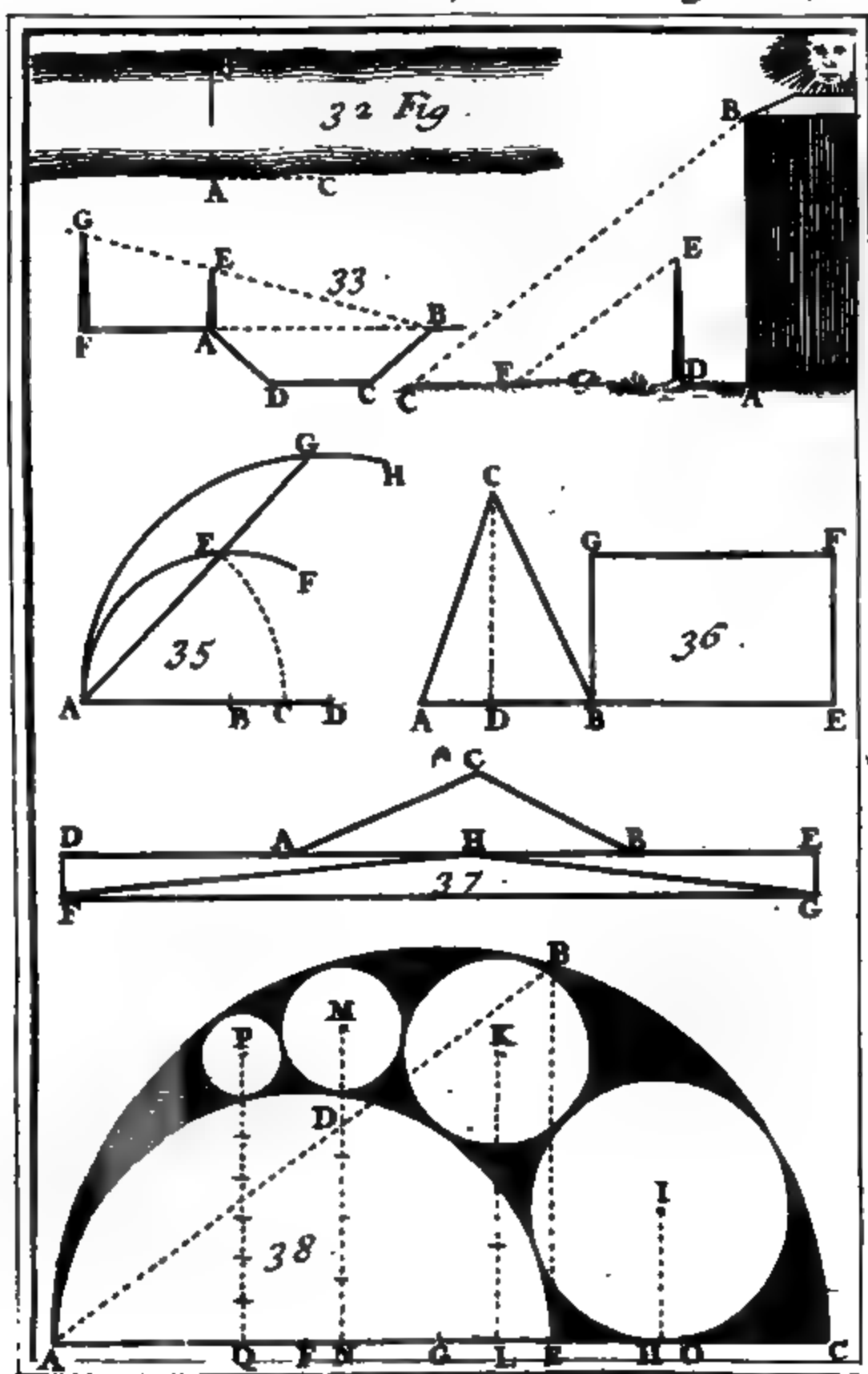








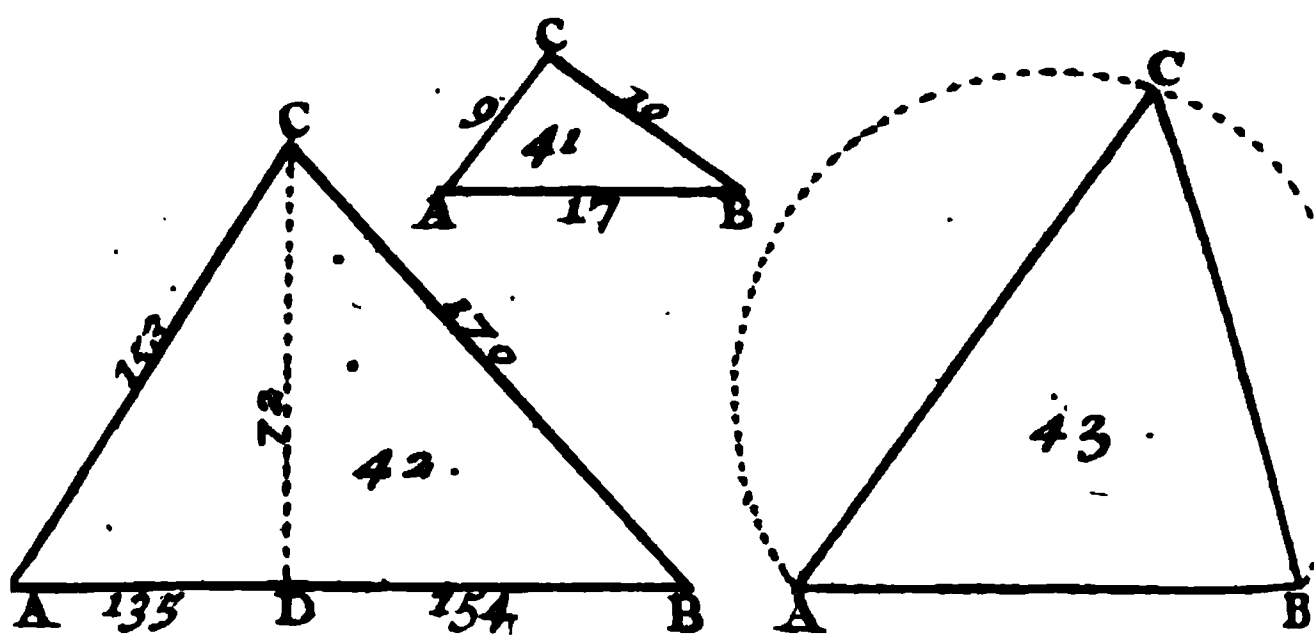
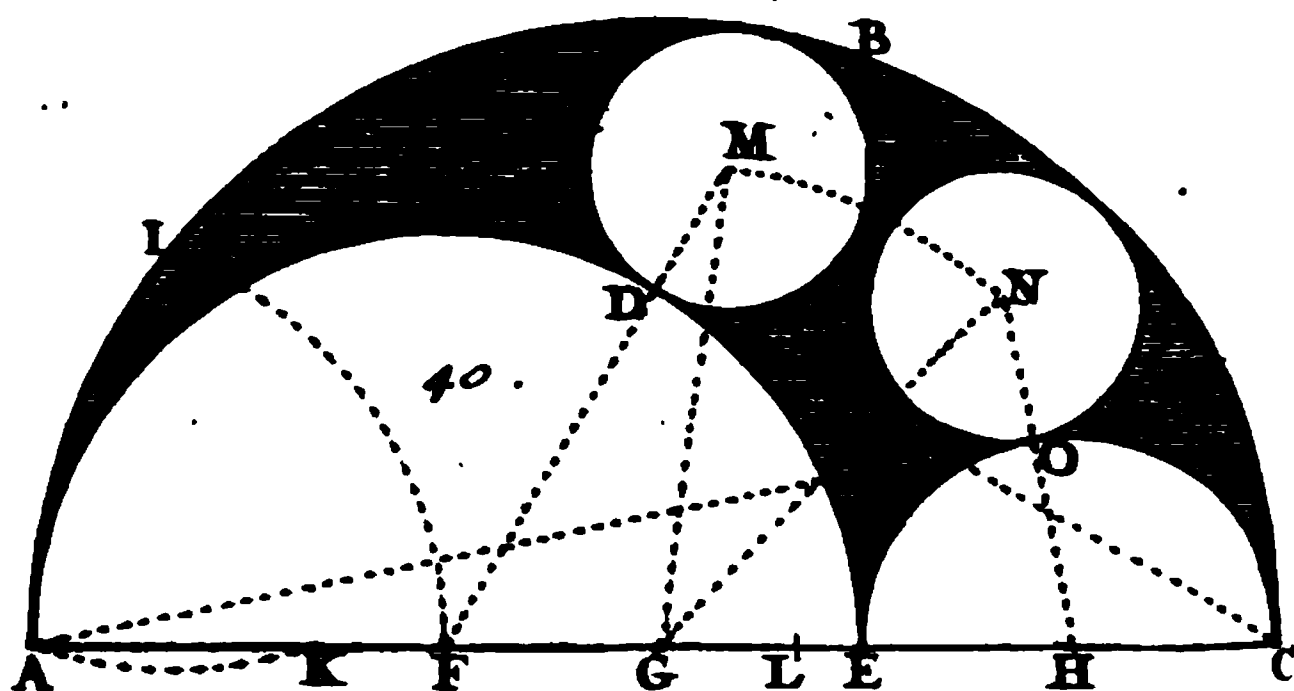
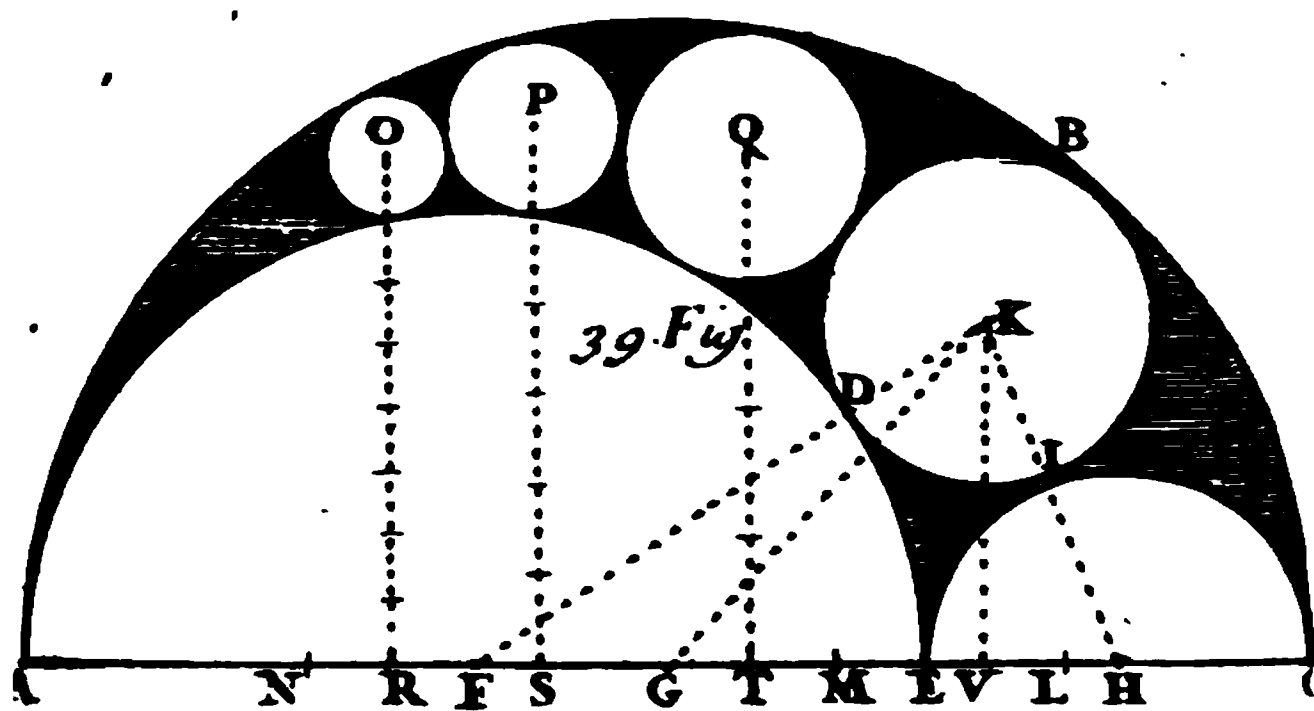


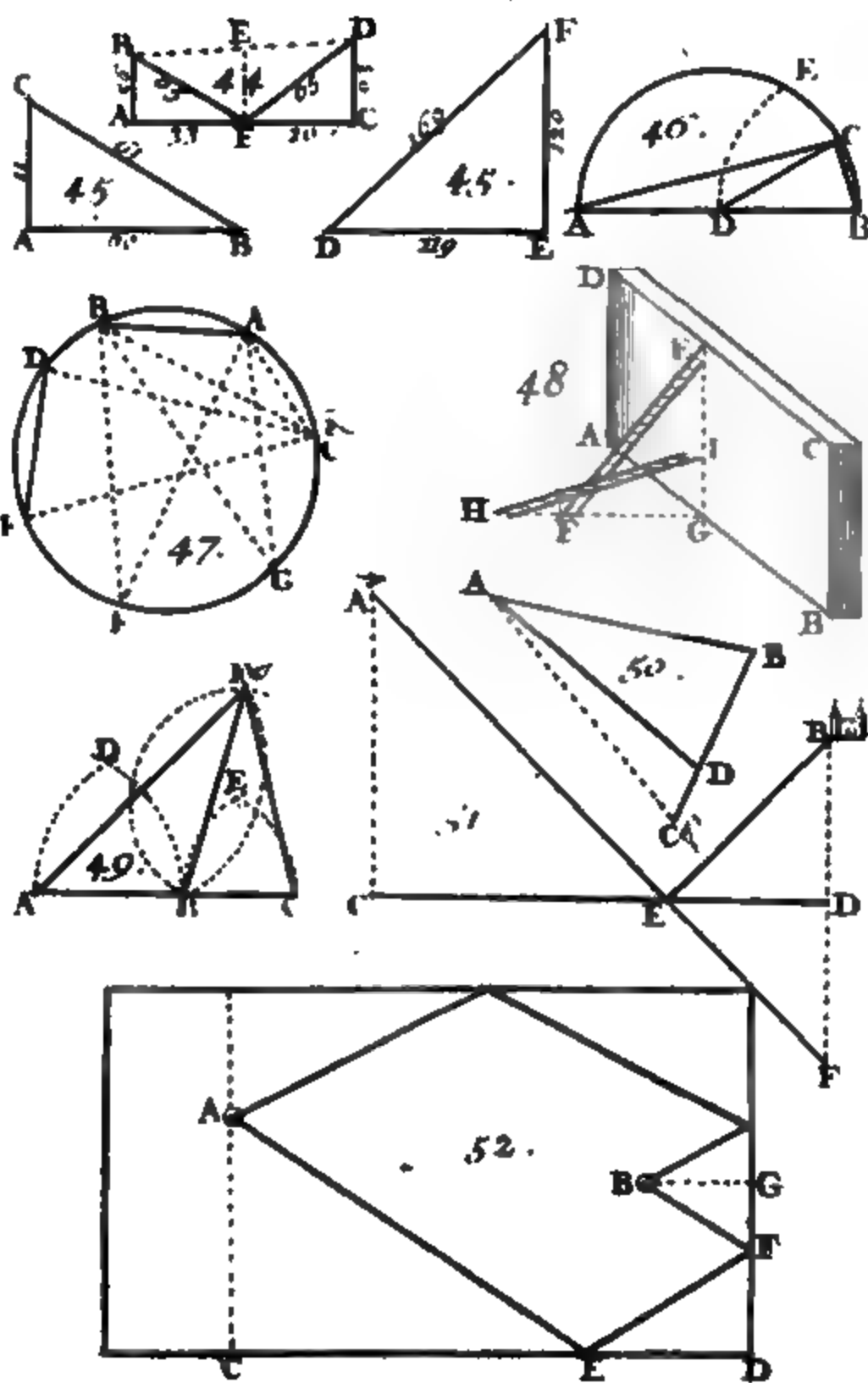










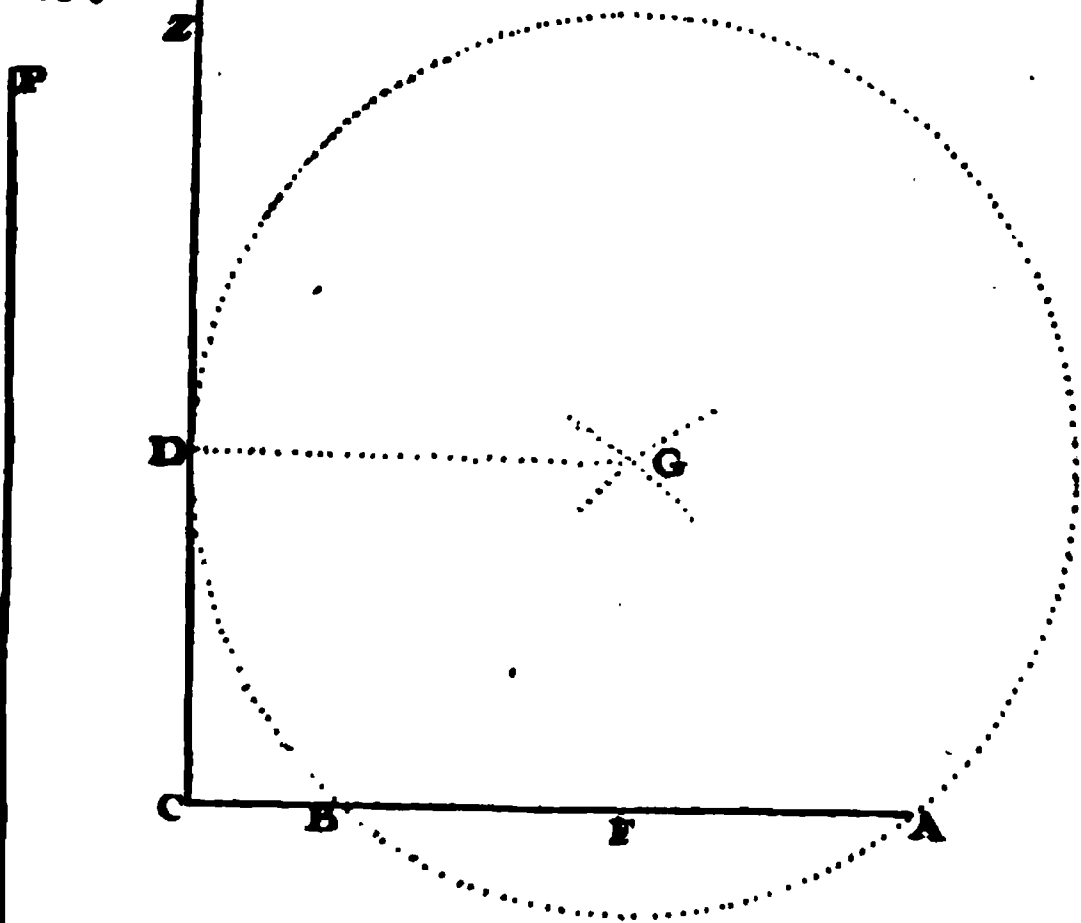




*Musique.*  
*page 338.*

*Figure 7.*

pag. 339.



30. C. VT

32 b. SI

361 A. LA

40. G. SOL

35 | F. FA

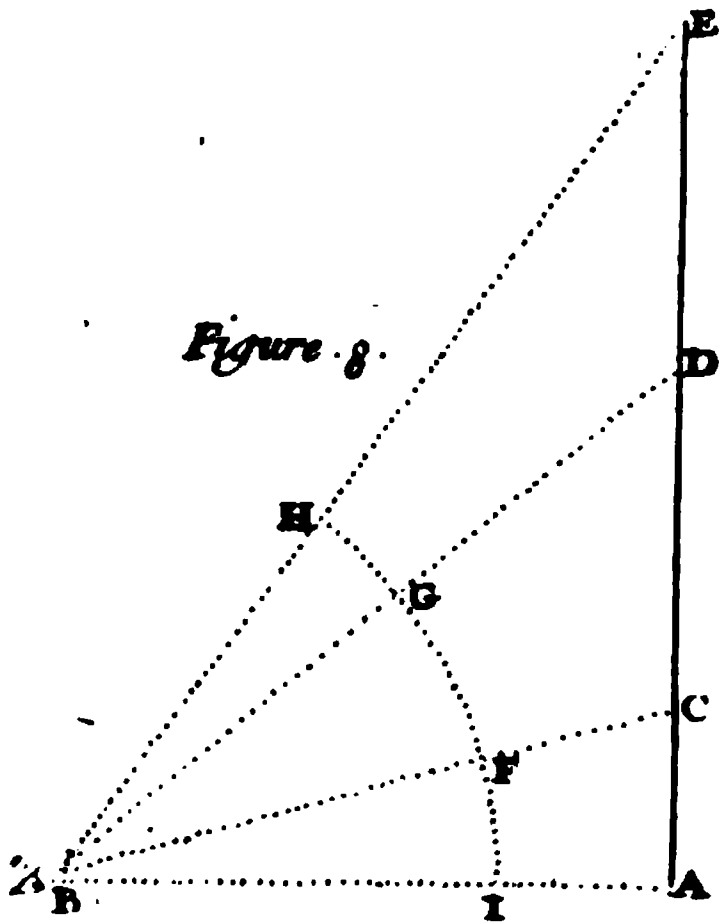
48 E. MI

54 D. RE

604 C. VT

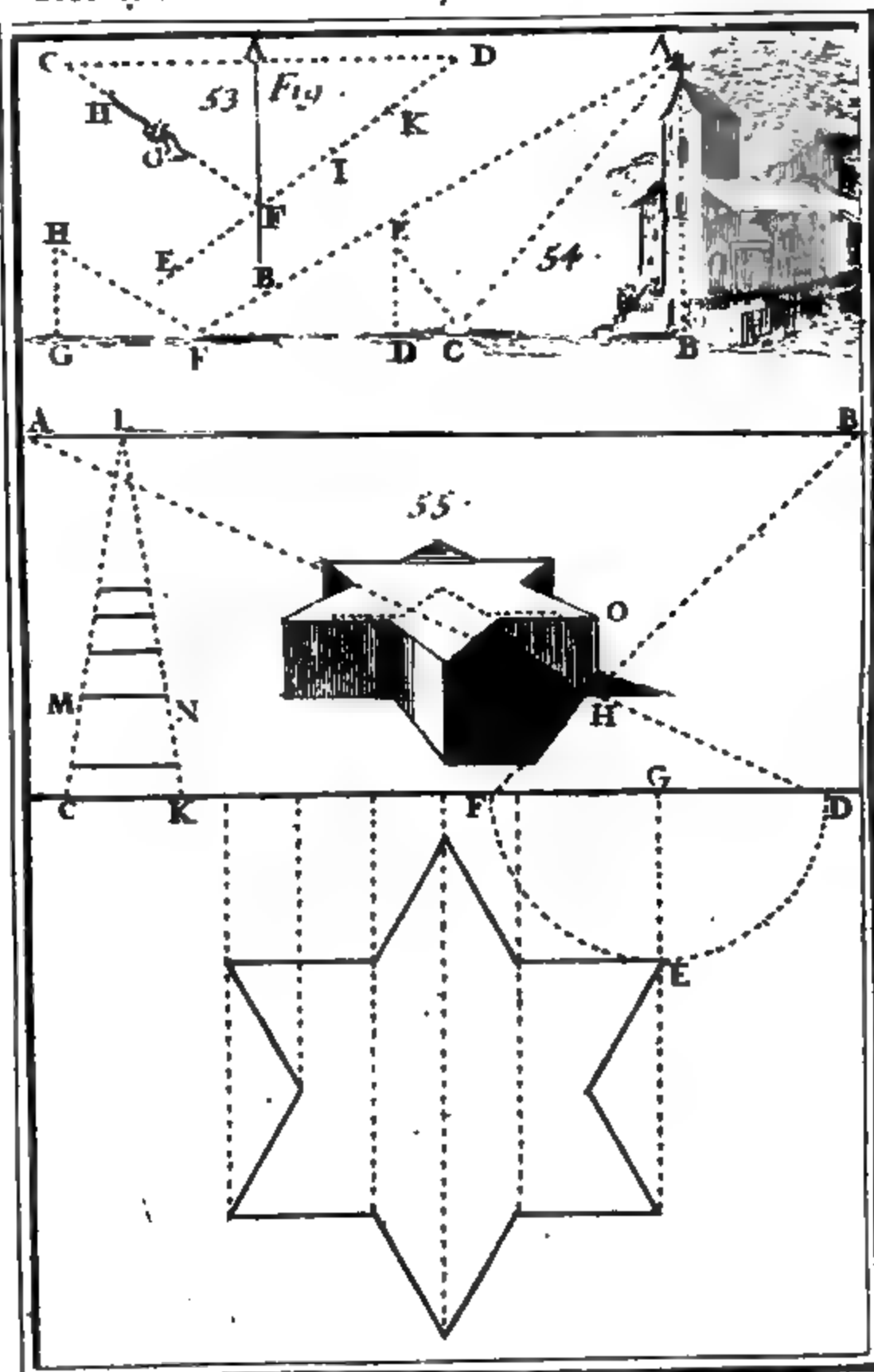
6 B. S1

*Figure 8.*

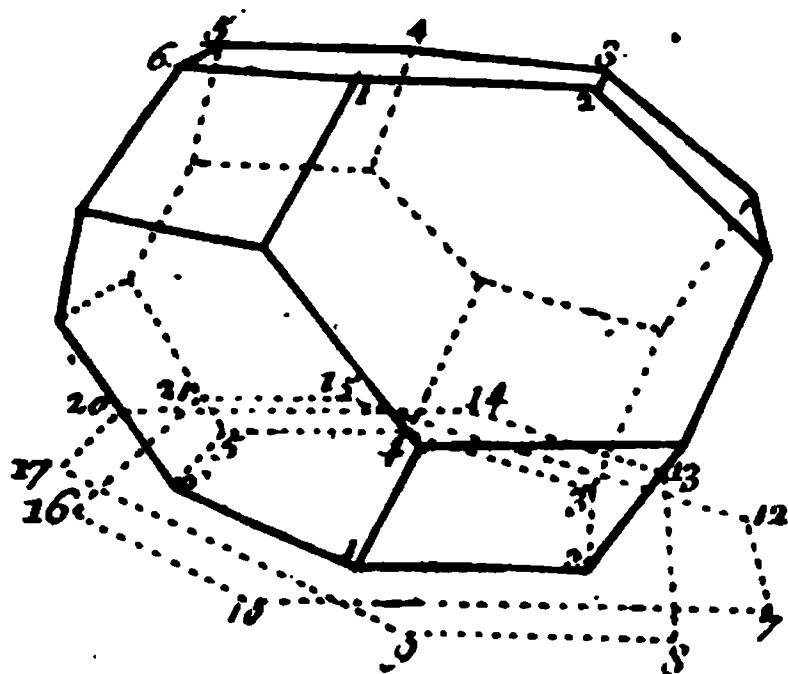




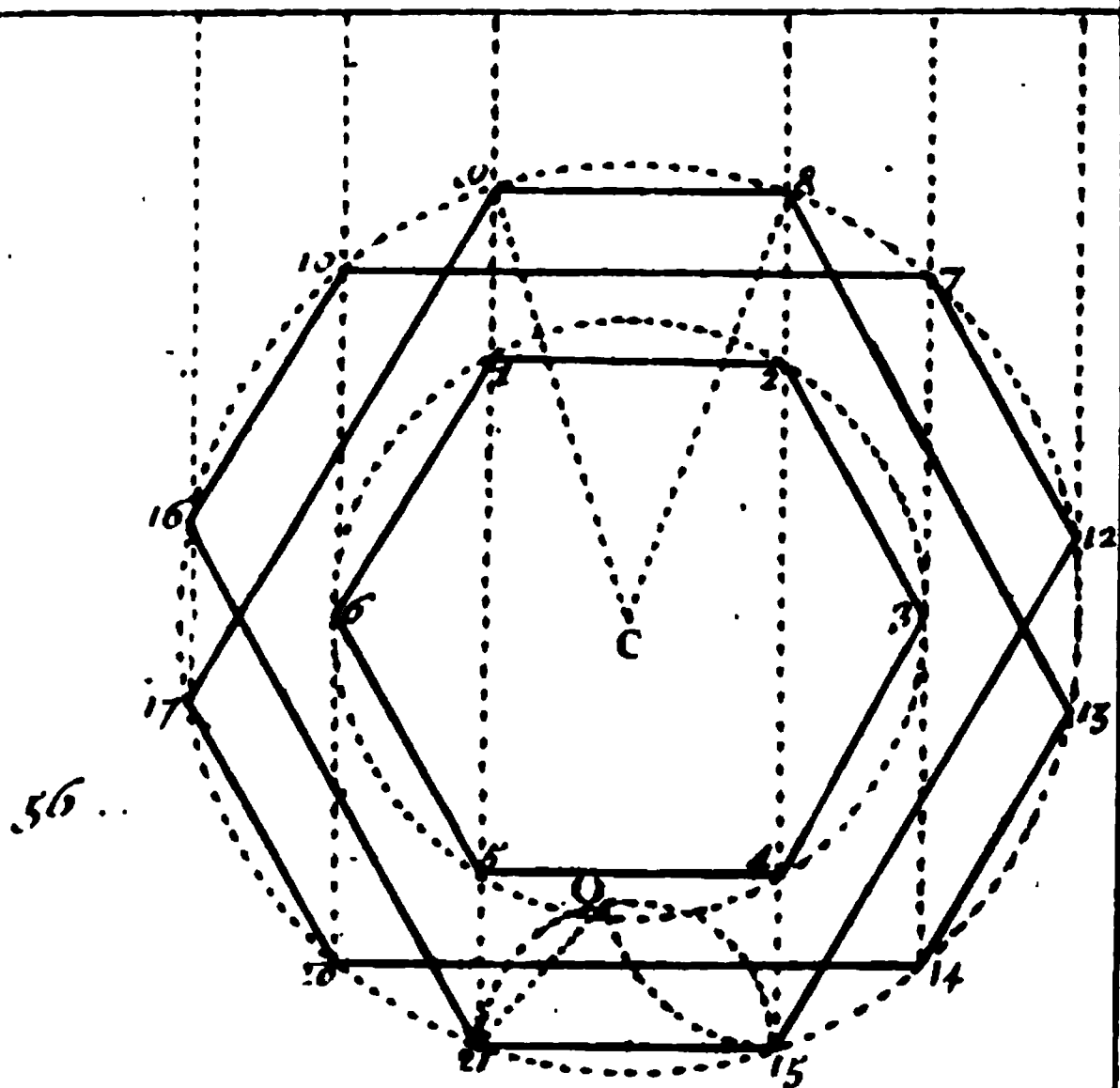






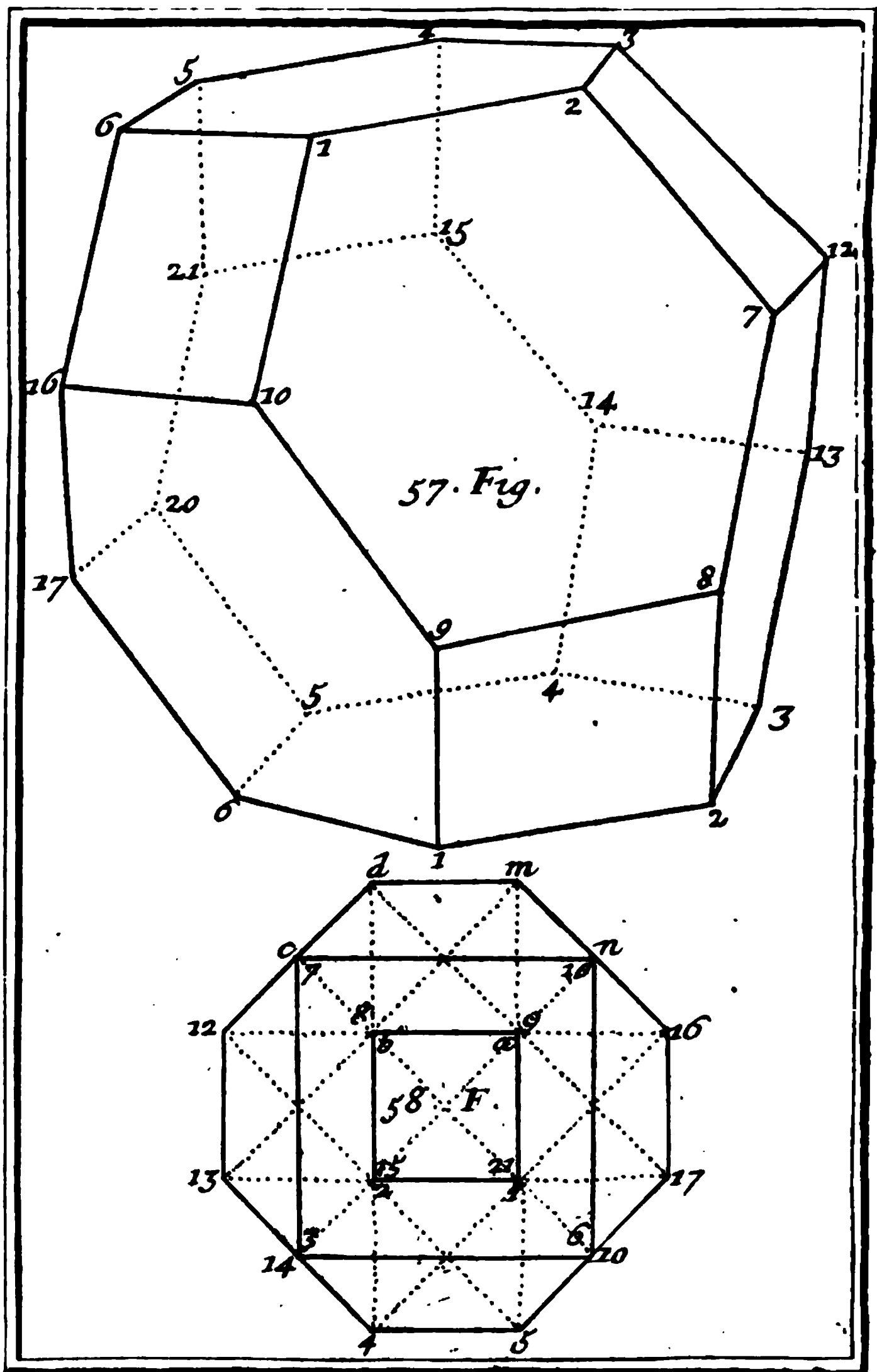


56. Fig.

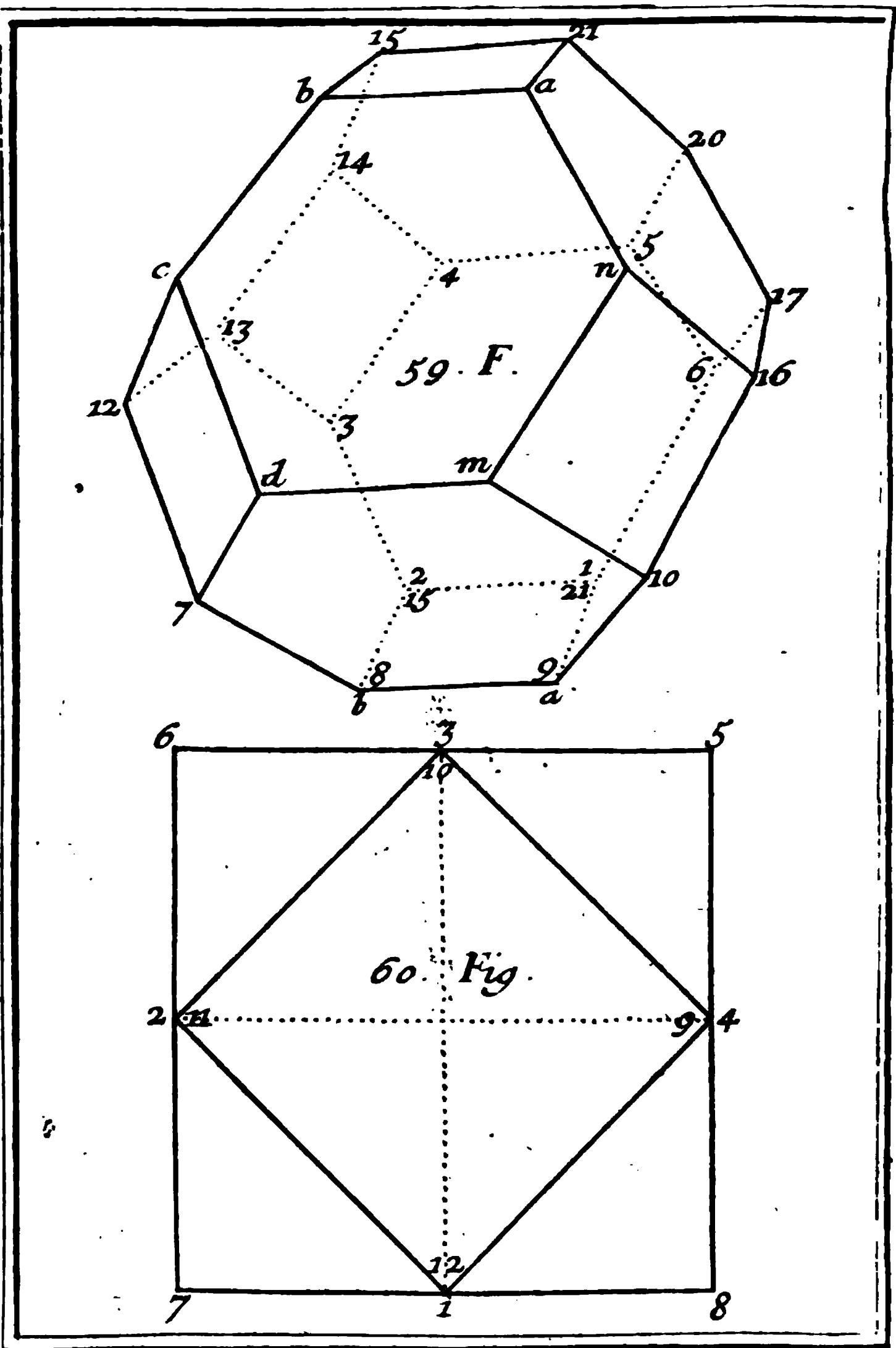


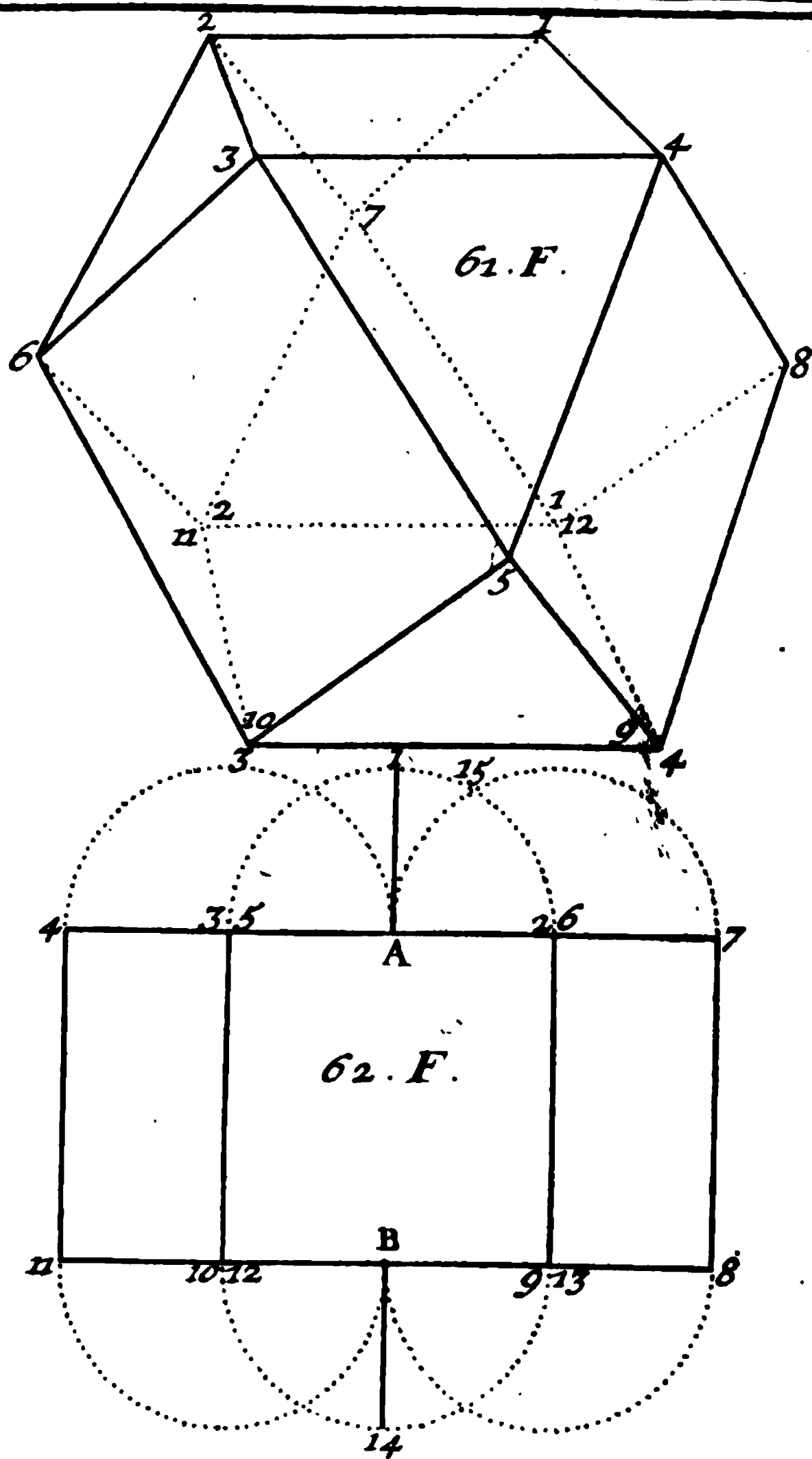






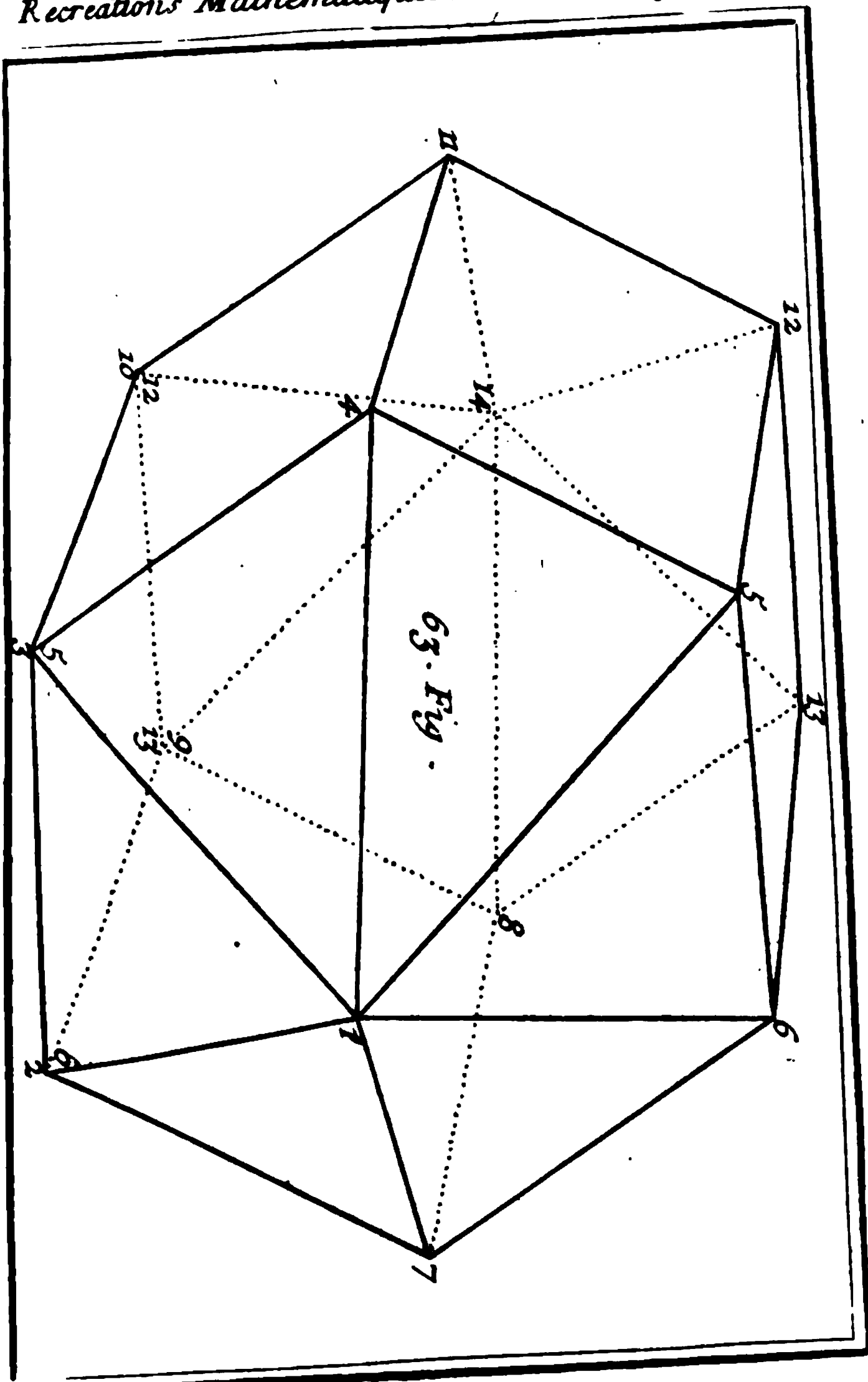






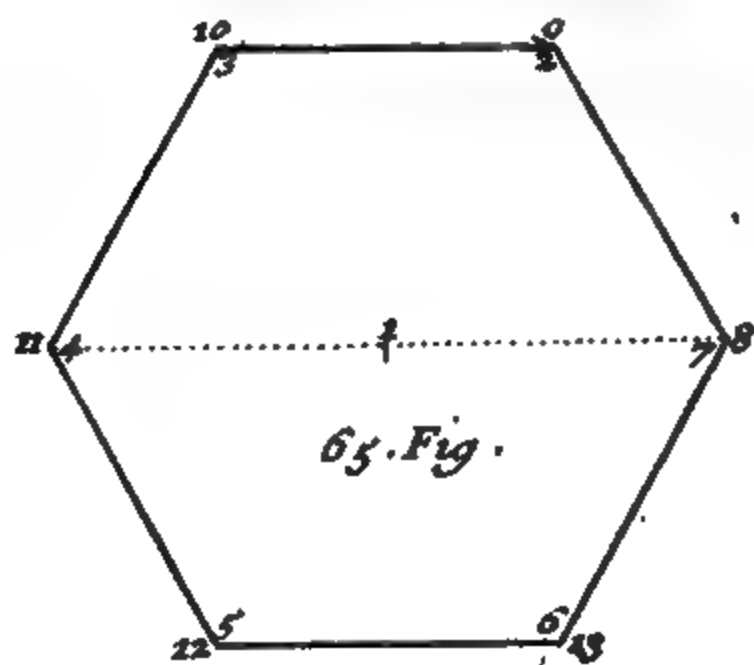
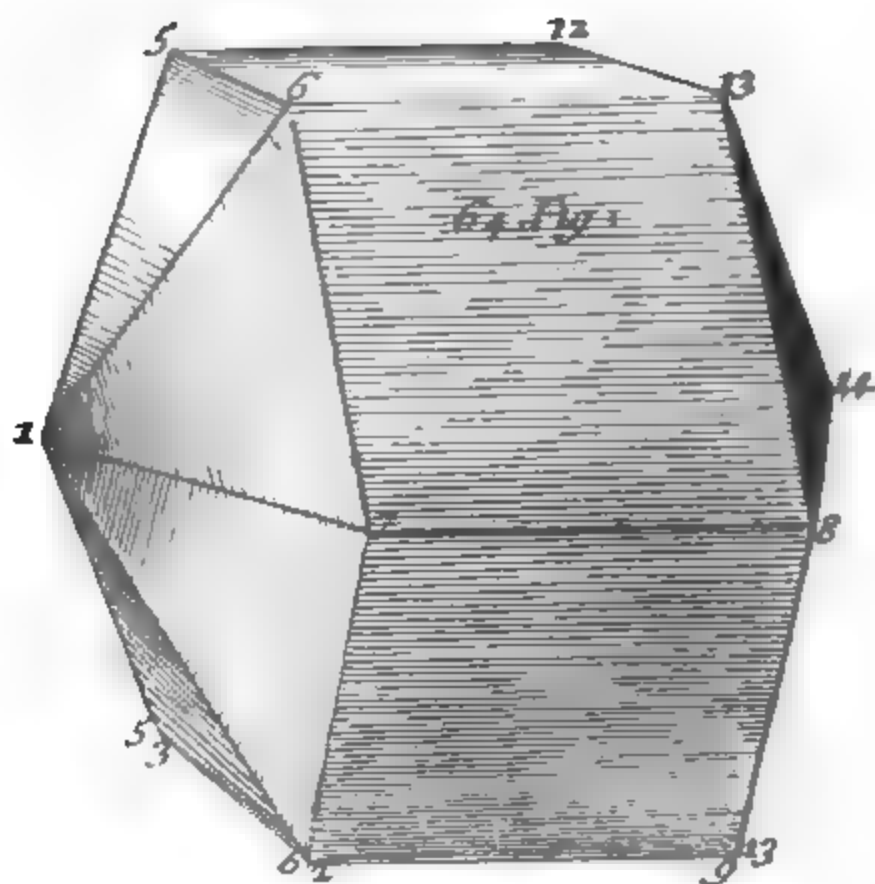


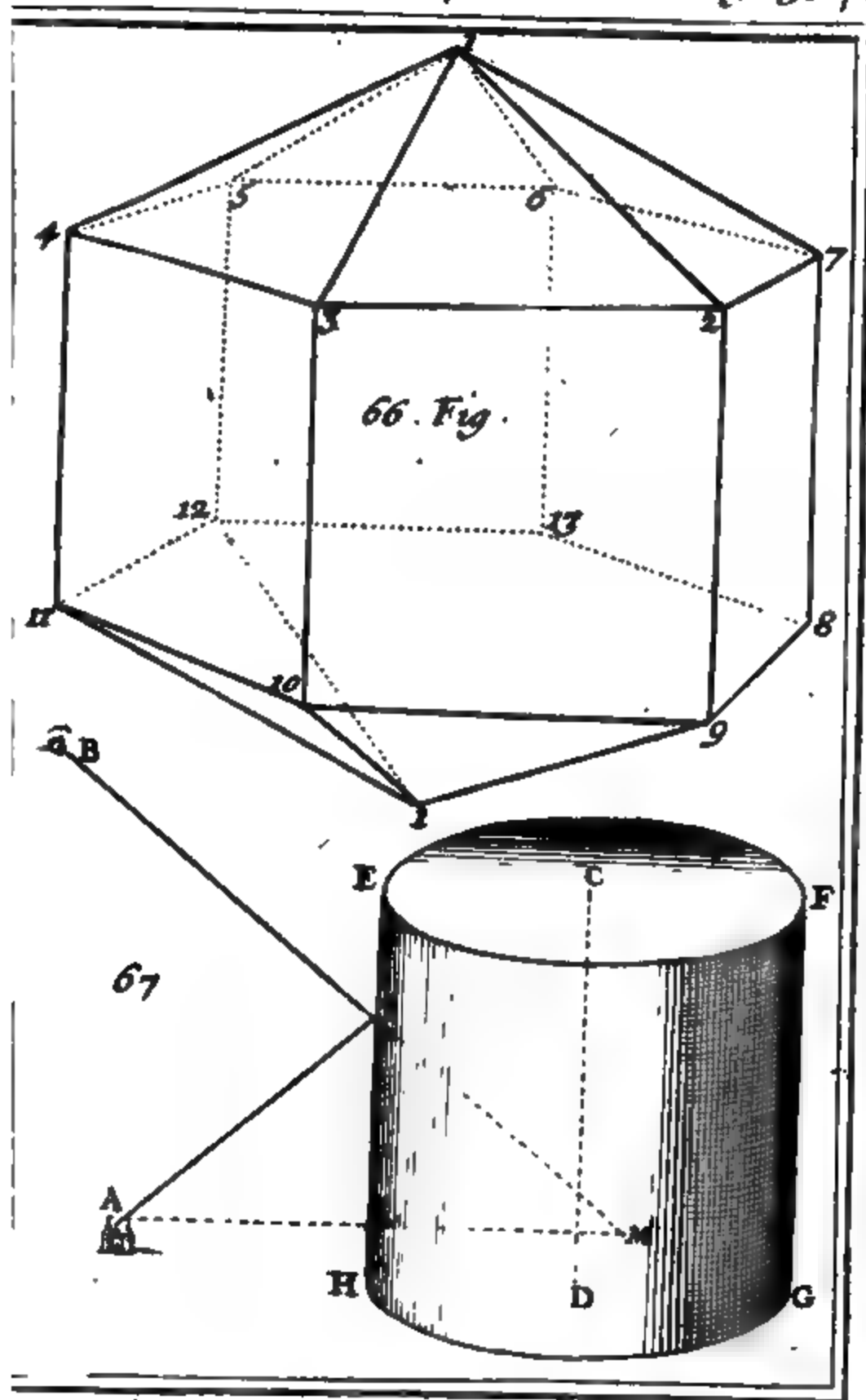






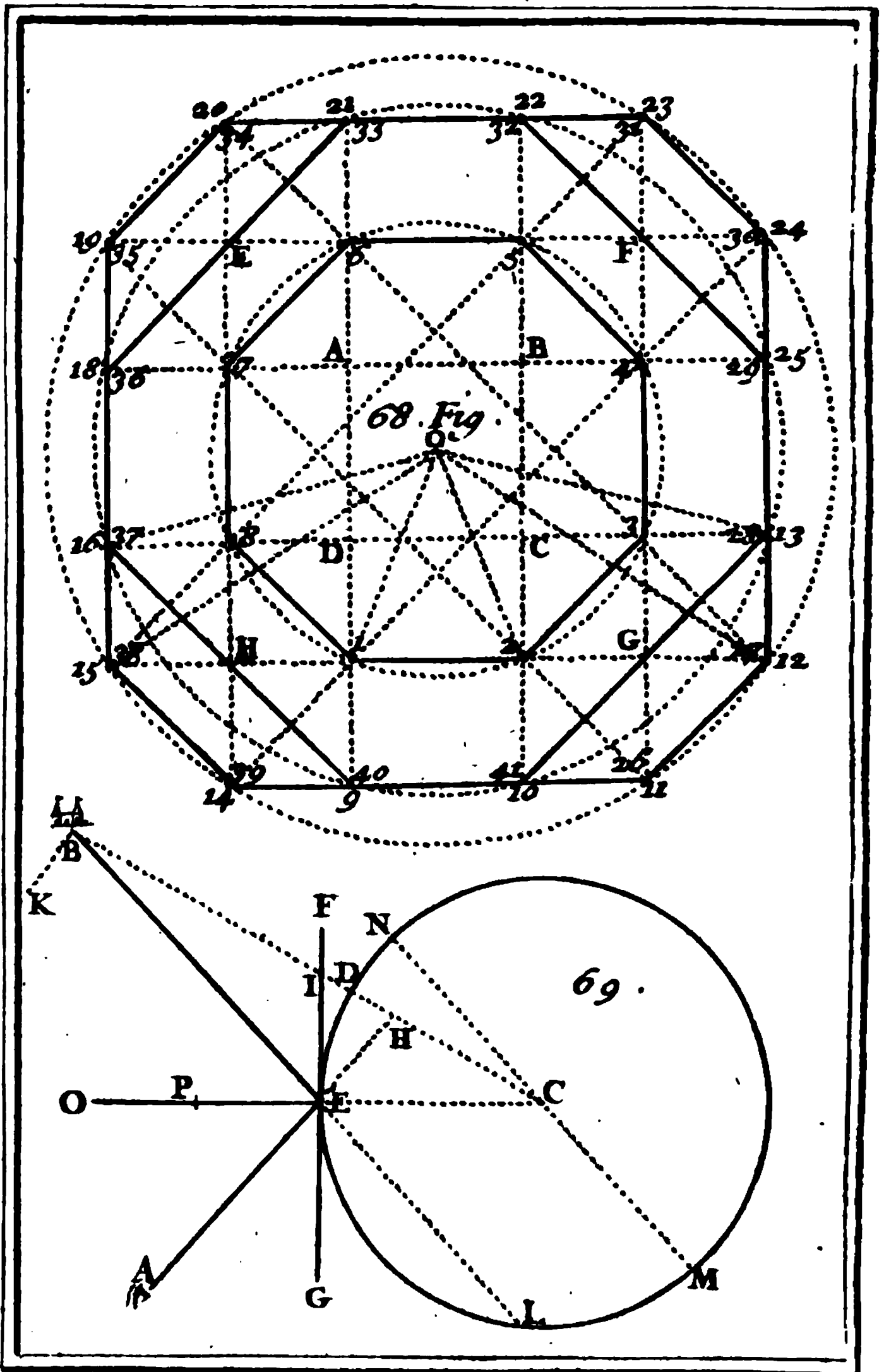




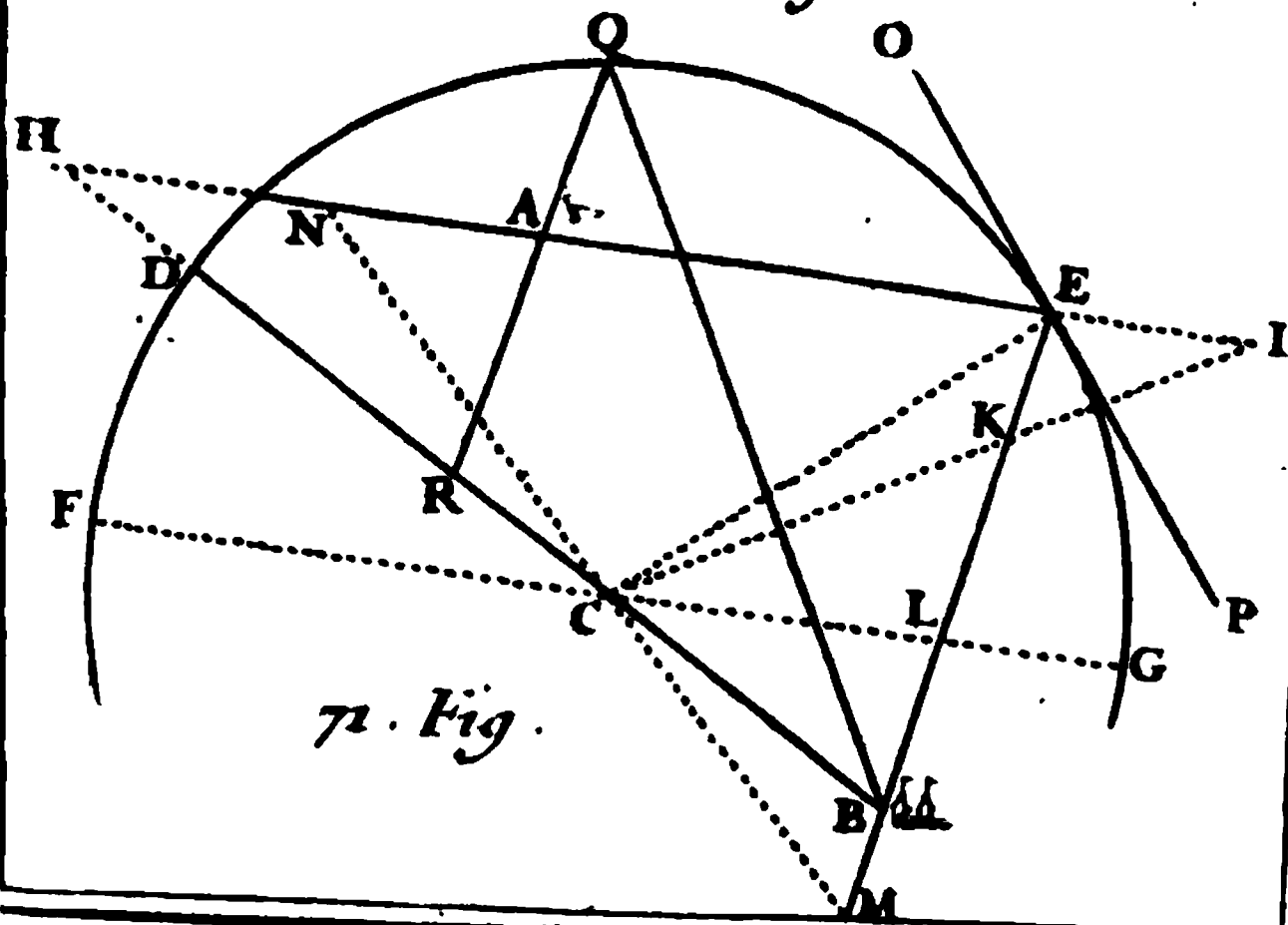
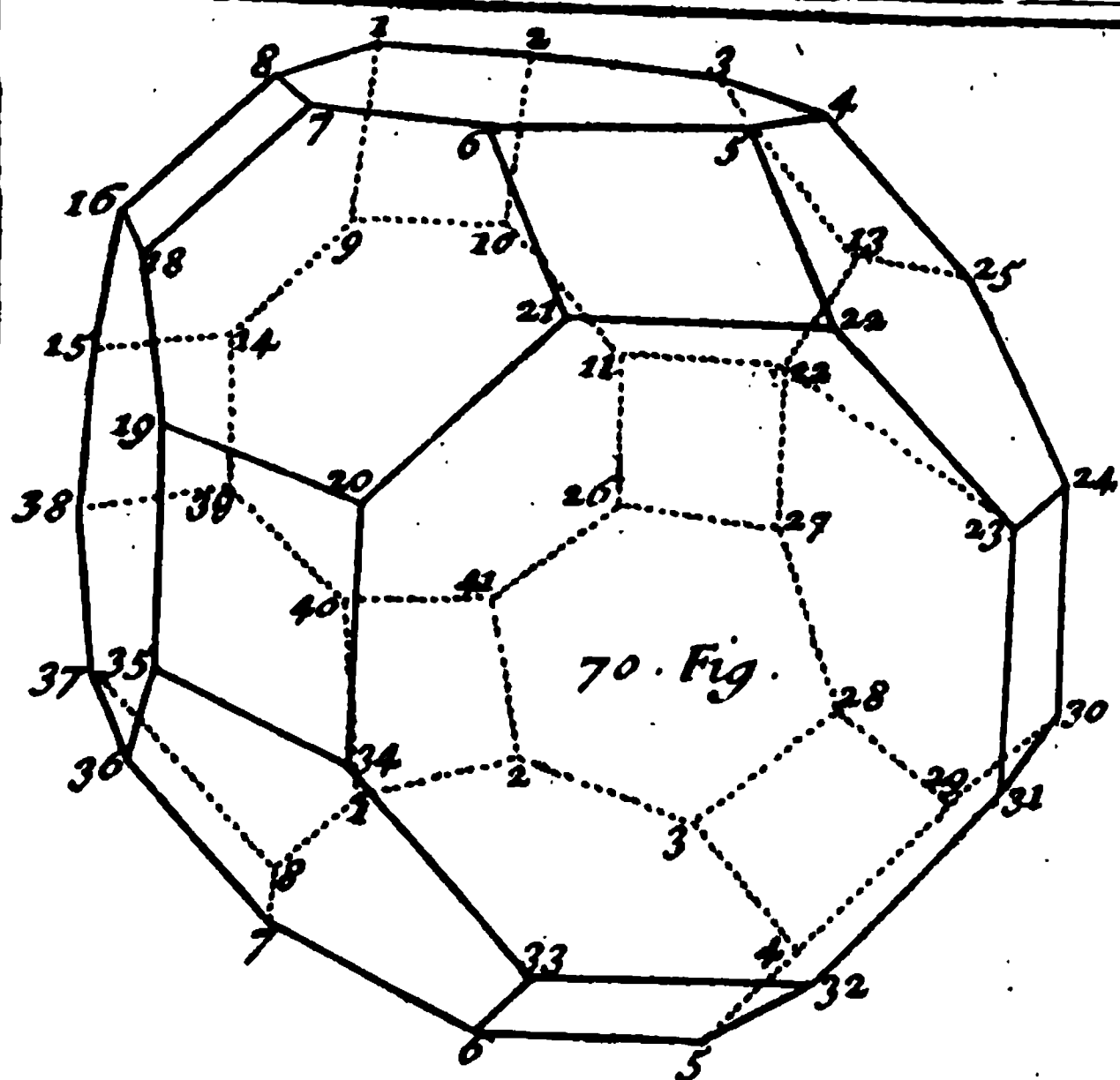












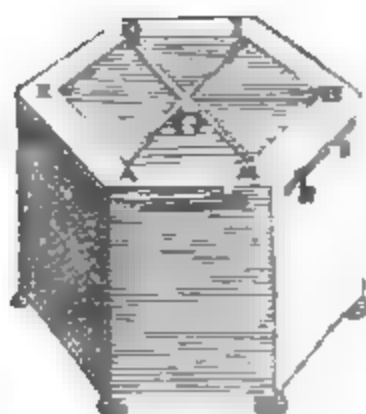




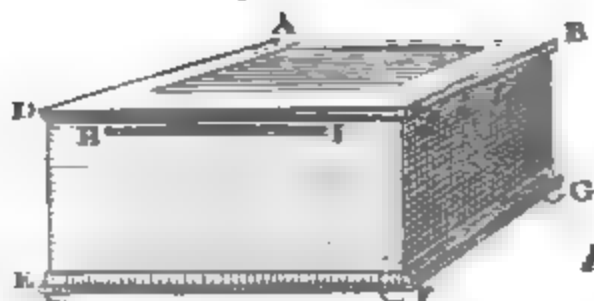
*Figure 9.*



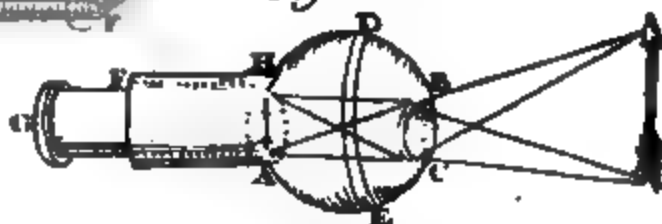
*Figure 10. pag. 363*



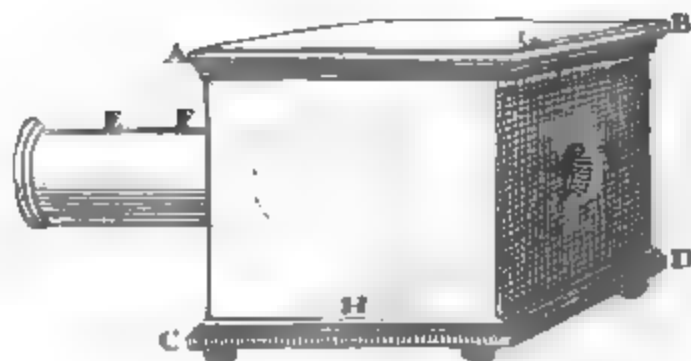
*Figure 11.*



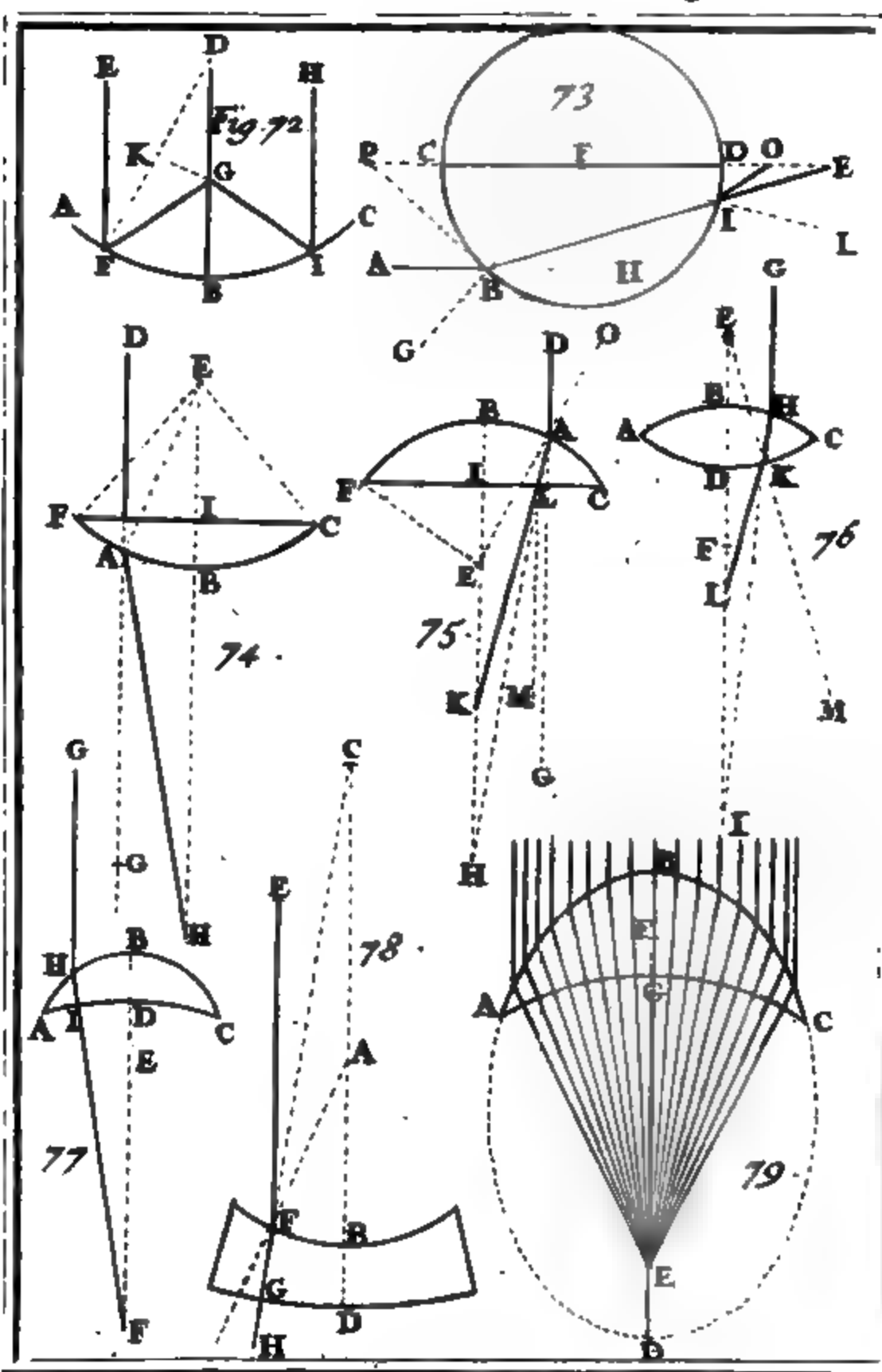
*Figure 12.*



*Figure 13.*







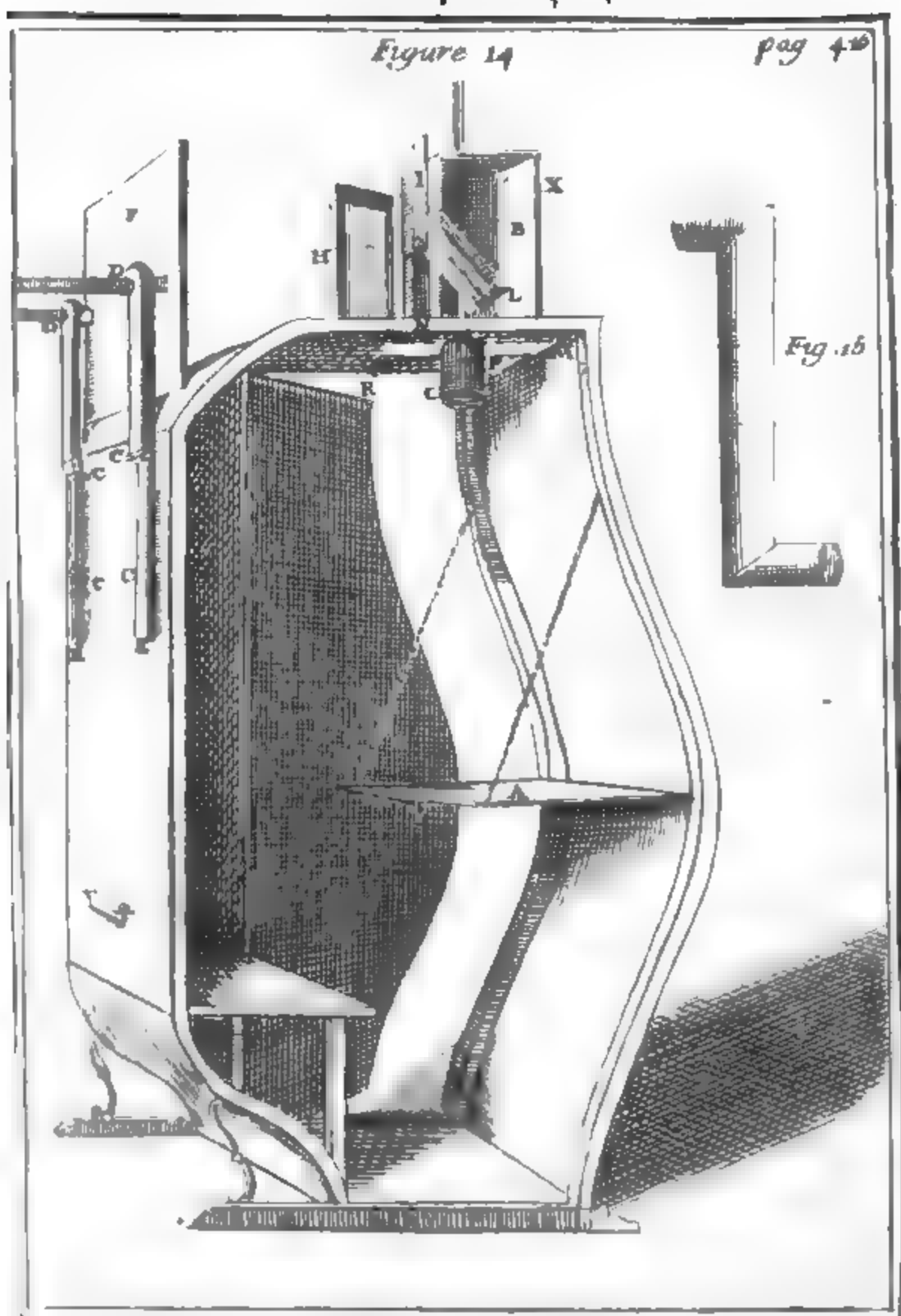








Fig. 16.

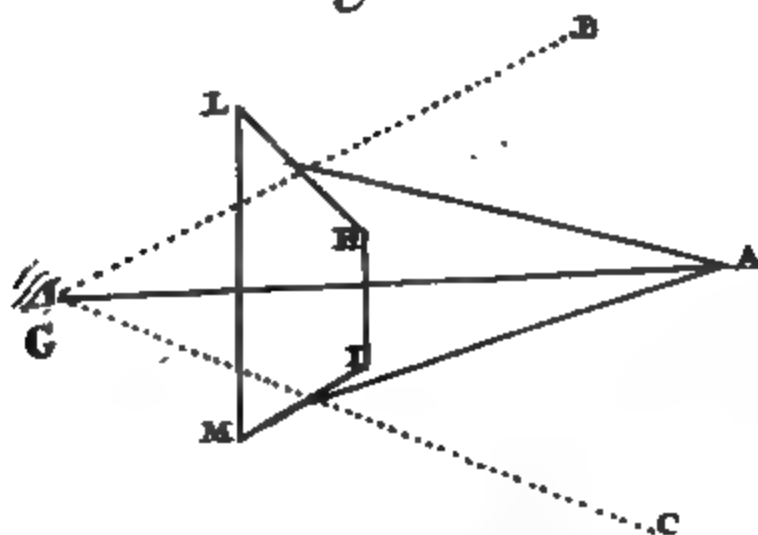


Fig. 17.

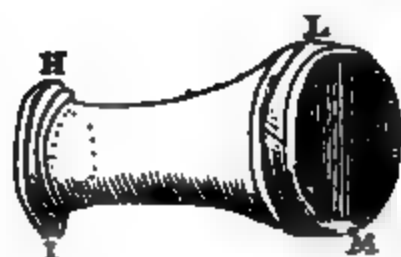
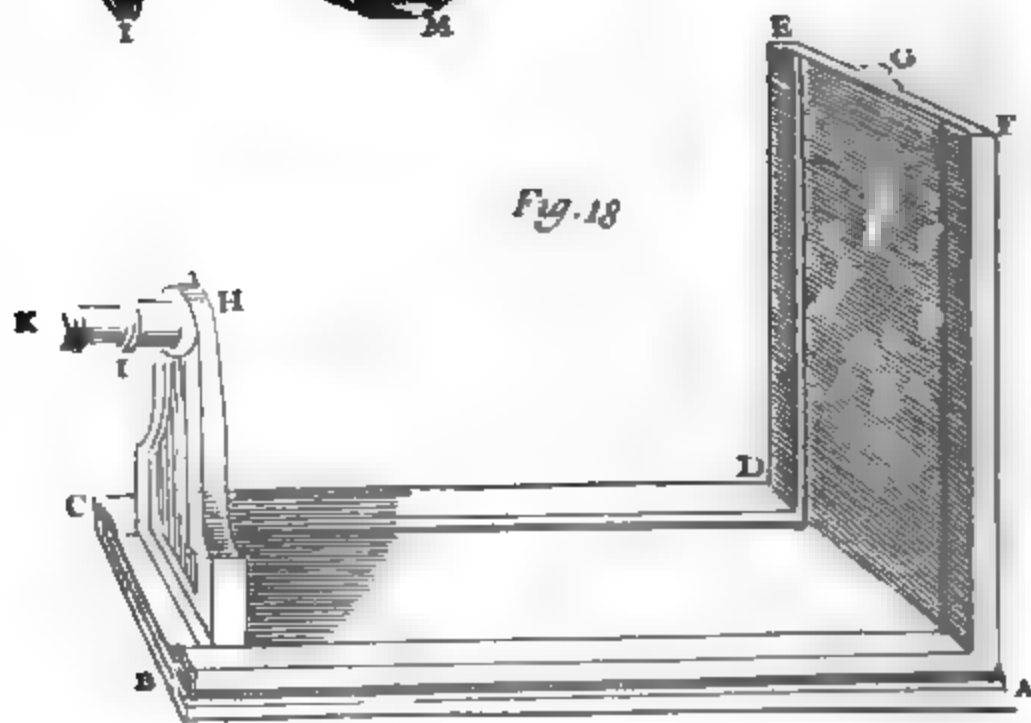
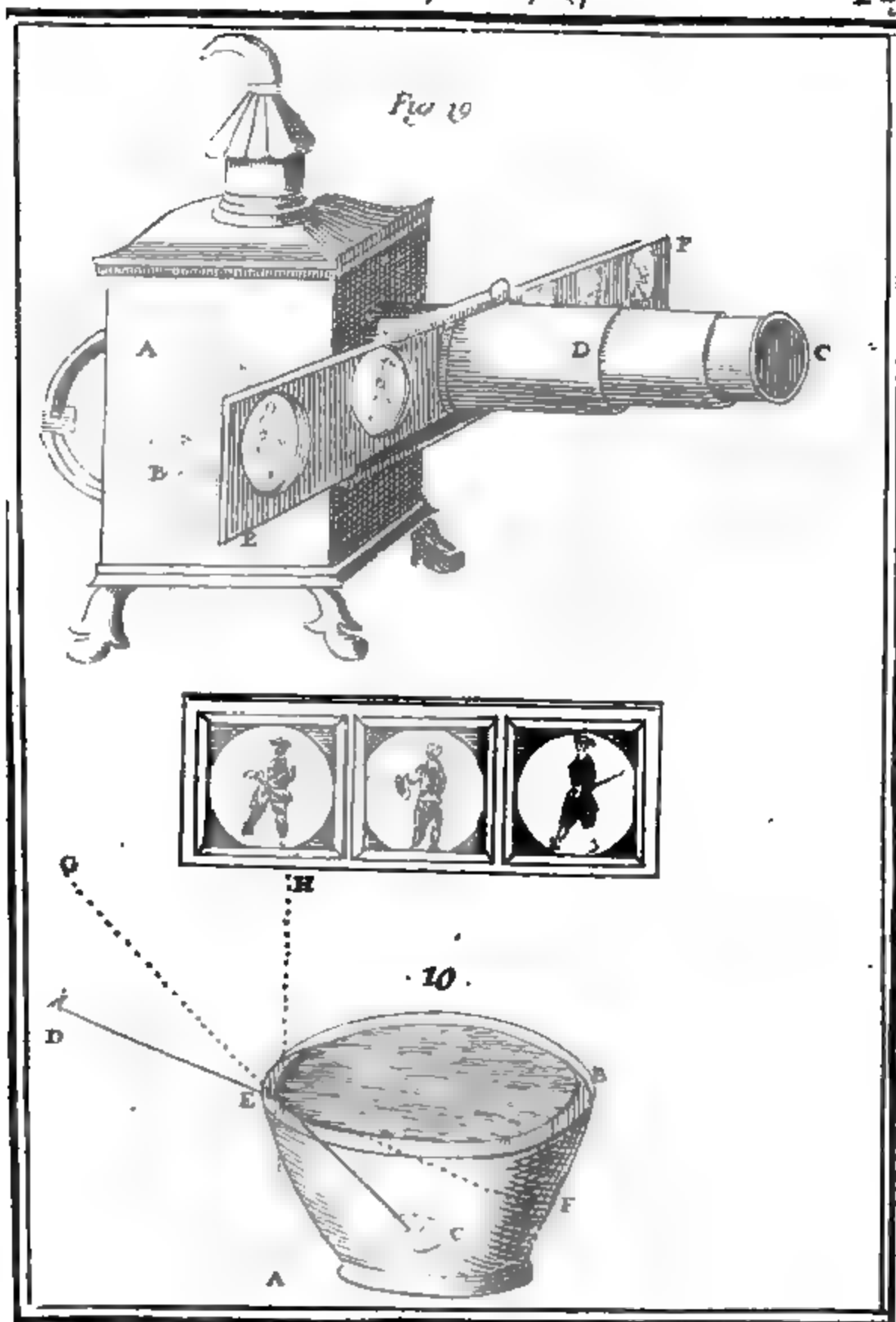
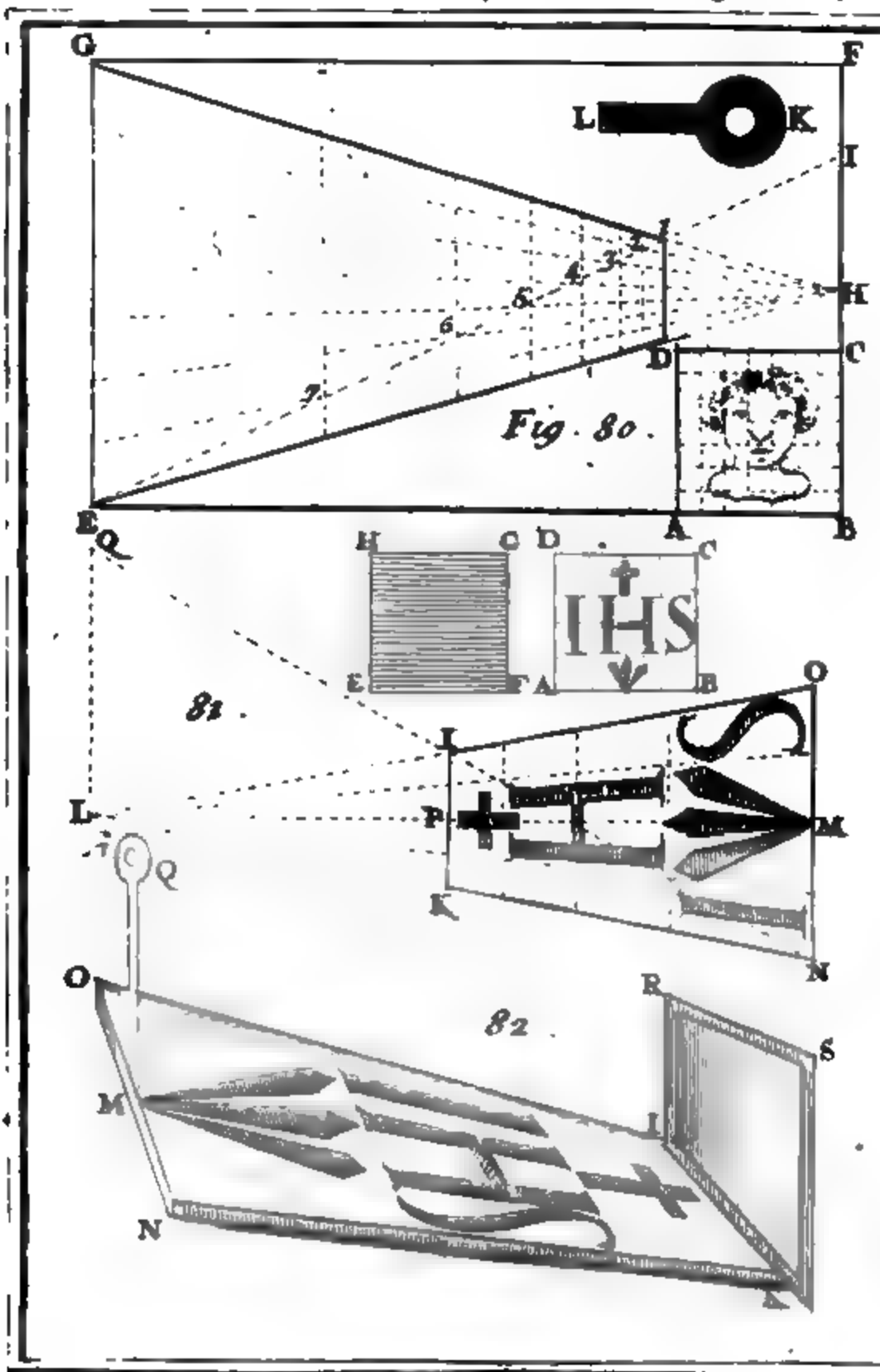


Fig. 18

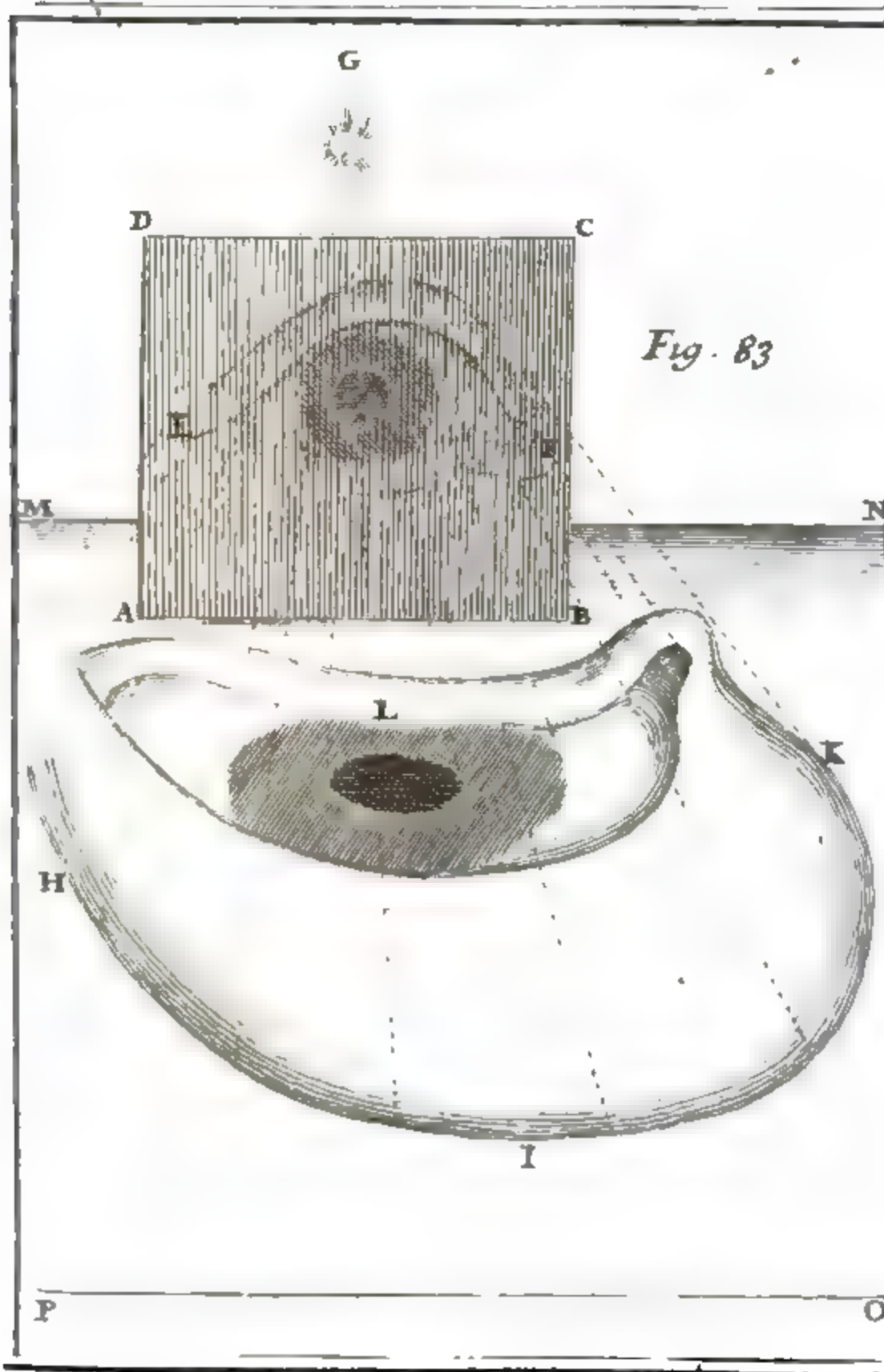












To J. Pl. 29.







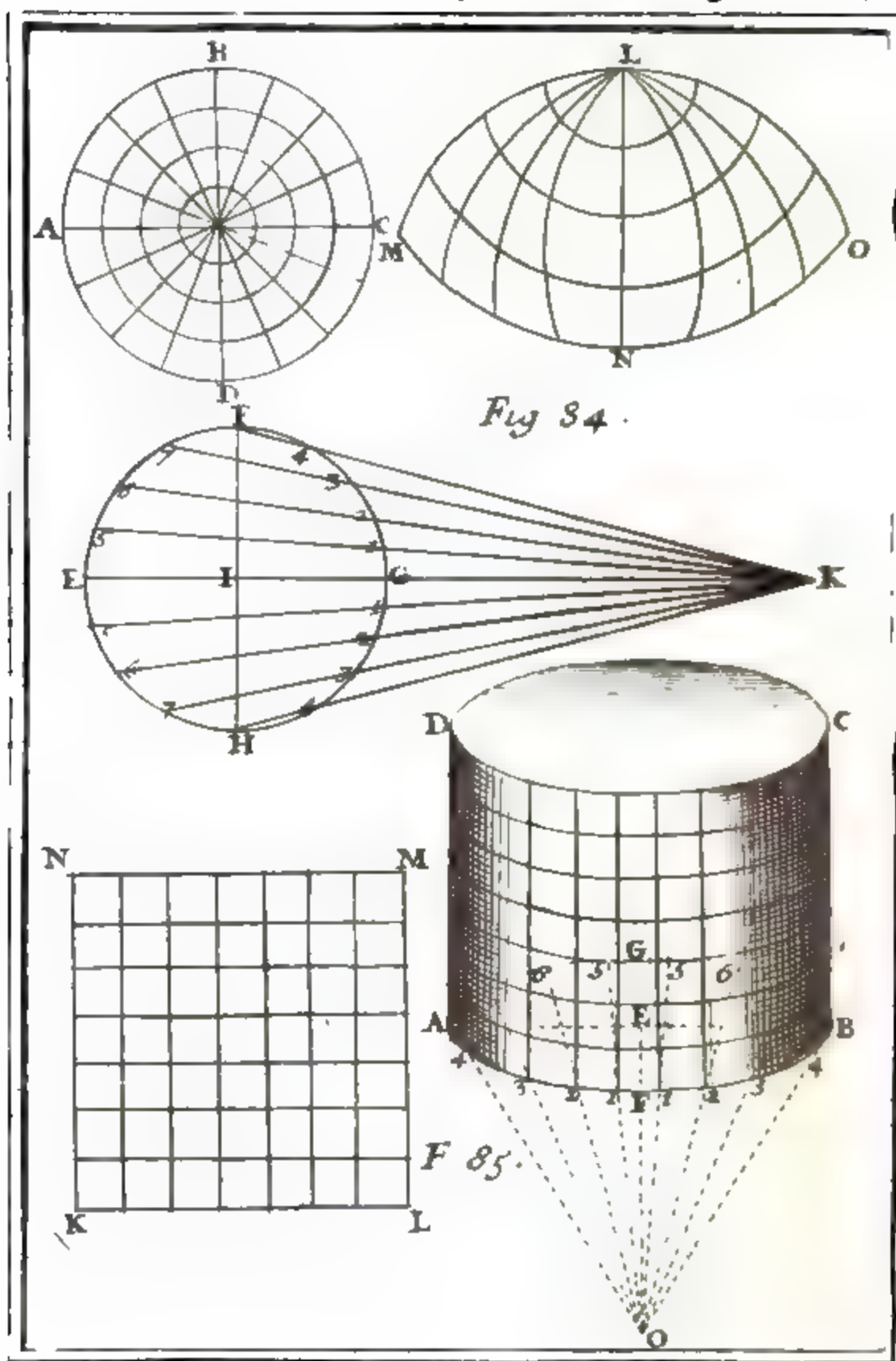


Fig 84.

F 85.



